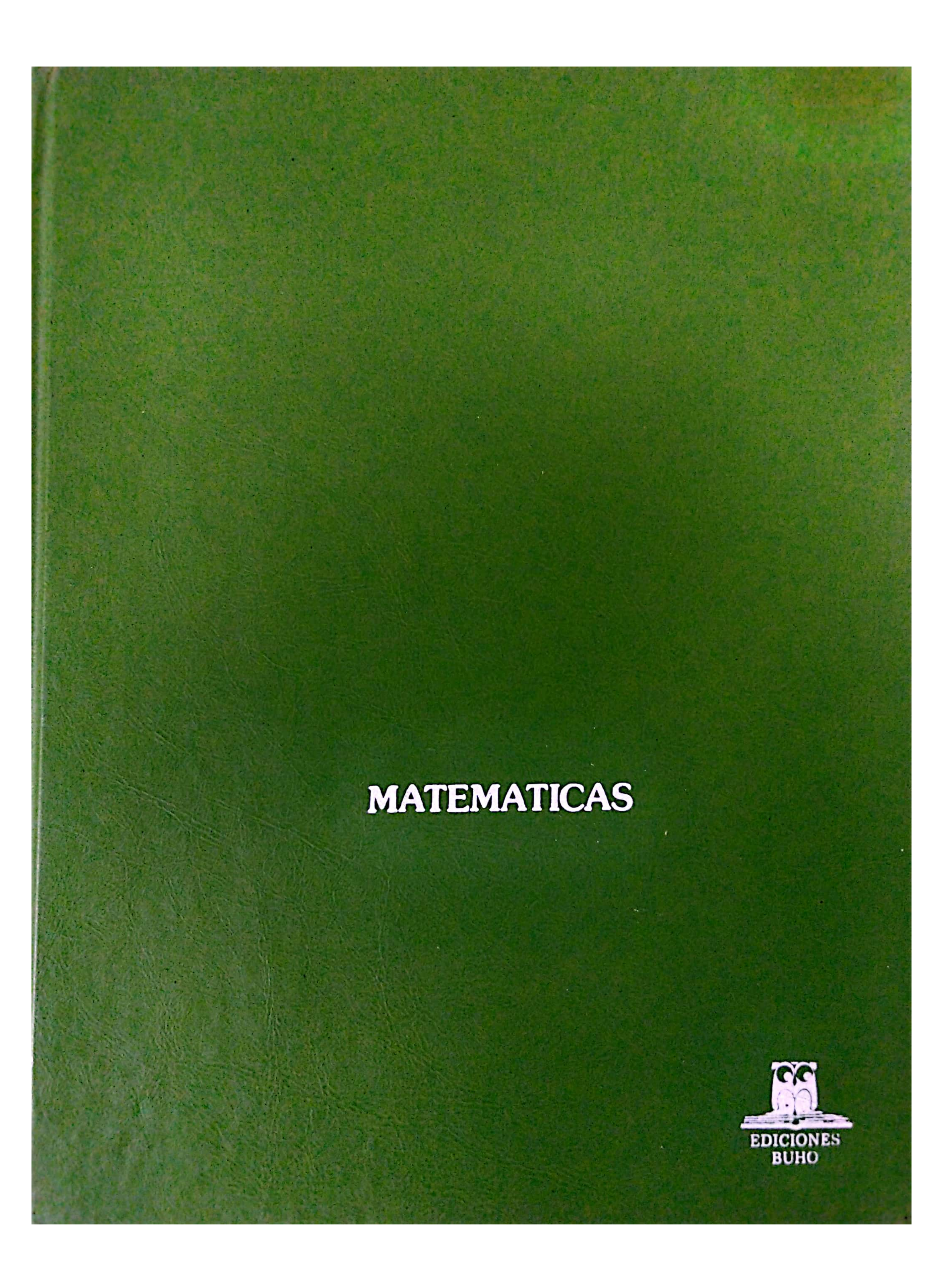

MATEMATICAS
EDICIONES
BUHO

ENCICLOPEDIA DE LAS CIENCIAS Y DE LAS LETRAS



TITULOS QUE FORMAN ESTA COLECCION

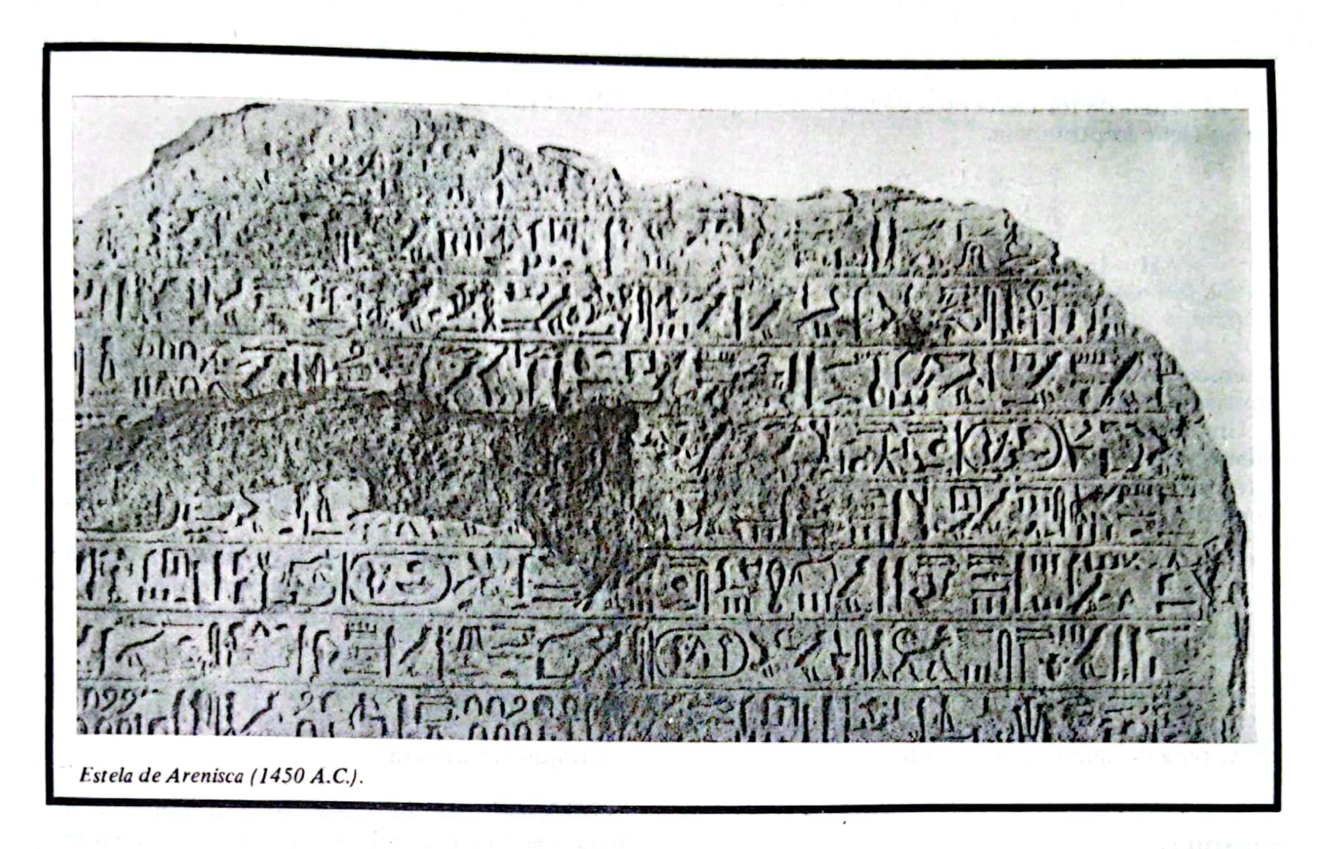
- MATEMATICAS/ APENDICE COMPLEMENTARIO
- HISTORIA/ GEOGRAFIA
- BOTANICA/ ZOOLOGIA/ ANATOMIA
- LENGUAJE/ BIOGRAFIAS
- LITERATURA

Impreso por
[illegible]
R.I. 7793-3

MATEMATICAS

1RA. EDICION 1979
2DA. EDICION 1979
3RA. EDICION 1980
4TA. EDICION 1980
5TA. EDICION 1981
6TA. EDICION 1981
7a. EDICION - 1982

HECHO EL DEPOSITO DE LEY



Estela de Arenisca (1450 A.C.).

TEORIA DE CONJUNTOS

DEFINICION

Llámase *conjunto* a un grupo o colección de entidades que pueden ser específicamente identificados; en otras palabras, debe poderse determinar sin lugar a dudas si cada objeto o entidad que se considera forma o no parte del grupo. Si los elementos individuales no pueden identificarse de esta manera, ellos no constituyen un conjunto en el sentido matemático.

EJEMPLOS

Las letras, desde las B hasta la H.
Los números, desde el 8 hasta el 24.
Los nombres de los 50 estados de los Estados Unidos.
(Obsérvese que cada elemento de estos conjuntos es específicamente identificable.)

Un conjunto puede ser finito o infinito, con referencia a los elementos que lo componen. El conjunto de todas las letras del alfabeto es un conjunto finito (tiene exactamente 28 elementos) mientras que el conjunto de los números naturales es un conjunto infinito, puesto que no tiene fin (1, 2, 3, 4, . . .) (los puntos suspensivos indican que el conjunto no acaba.)

Al definir un conjunto puede dársele cualquier nombre. Por ejemplo podemos llamar conjunto S al formado por los elementos TOMAS, RICARDO y ENRIQUE y escribiremos.

S = TOMAS, RICARDO, ENRIQUE

Con esta definición, diremos, con absoluta certeza, que TOMAS es un elemento del conjunto S y que JUAN no es un elemento del conjunto S.

A menudo se usan llaves { } para encerrar la lista de elementos de un conjunto. En este caso, cada elemento del conjunto se separa del siguiente con una coma.

$$H = \{a, b, c, d\}$$

La afirmación anterior expresa que H es un conjunto que consta de los elementos a, b, c, y

d. El orden de los elementos dentro del conjunto no tiene importancia.

$$H = \{a, b, c, d\} \qquad I = \{d, b, a, c\}$$

Estos dos conjuntos son idénticos, ya que contienen exactamente los mismos elementos.

Un conjunto puede no contener ningún elemento. Se le llama entonces conjunto vacío. En este caso no habría nada dentro de las llaves y se expresaría en la forma.

$$J = \{\ \} \quad \text{o bien} \quad J = \emptyset$$

Es convención usual la de utilizar letras mayúsculas para designar conjuntos y letras minúsculas para designar sus elementos.

EJEMPLO

$$B = \{a, j, k, m\}$$

Cuando se quiere expresar que m es un elemento de B (o que m pertenece a B) recúrrese al símbolo especial $\in$.

Este, símbolo, como otros, se utiliza simplemente para ganar tiempo, puesto que es más rápido escribir «$m \in B$» que «m es un elemento del conjunto B» Para expresar que un elemento no es elemento de cierto conjunto S, se cruza el símbolo, $\notin$ Así, a $\notin$ B equivale a «a no es elemento del conjunto B»

SUBCONJUNTOS

Si dos conjuntos están relacionados en forma tal que cada uno de los elementos de uno de ellos es también elemento del segundo, el primer conjunto se denomina subconjunto del segundo (puede también decirse que el primer conjunto está contenido en el otro).

EJEMPLOS

1. $B = \{a, b, c, d, e\}$

   $C = \{a, b, c\}$

Por tanto, C es un subconjunto de B. Esta dependencia se indica con el símbolo $\subset$ que significa «es un subconjunto de». $C \subset B$.

2. Si el conjunto G está formado por todos los alumnos de cuarto grado de determinada escuela y el conjunto P por todos los alumnos de esa escuela entonces $G \subset P$ (G es un subconjunto de P).

Dos hechos saltan a la vista después de este análisis: 1) todo conjunto es subconjunto de sí mismo y 2) el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Conjunto universal

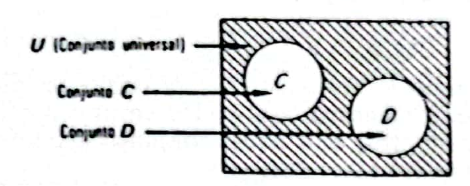
Cualquier conjunto que se considere, se situará siempre con referencia a un conjunto total o universal, dentro del cual coexisten o pueden coexistir conjuntos particulares. Así, en el caso del conjunto del ejemplo 2, el conjunto universal sería todo el alumnado de la escuela. Al hablar del conjunto universal lo designaremos siempre por medio de la letra U mayúscula.

Representación de conjuntos

Una manera simple de representar conjuntos y las relaciones que existen entre ellos se basa en el empleo de esquemas denominados diagramas de Venn. En estos diagramas suele utilizarse por lo general un rectángulo para representar el conjunto universal y dentro de él, círculos para representar otros conjuntos.

EJEMPLO

1. $C = \{a, b, c, d\} \qquad D = \{e, f, g, h\}$



El conjunto universal es aquí el alfabeto completo Los conjuntos C y D son sendas partes del universo

Los conjuntos que, como éstos, pertenecen al mismo universo, pero no tienen ningún elemento común se denominan disjuntos.

TIPOS DE CONJUNTOS

Conjuntos idénticos

Si dos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos (en cualquier orden), son idénticos. Esta circunstancia indícase con el signo igual, pero es menester recordar que el significado de ≪igual≫, en este caso, es el de que los dos conjuntos contienen los mismos elementos.

EJEMPLO

A = B (A contiene los mismos elementos que B)
A = (TOMAS, RICARDO, ENRIQUE)
B = (ENRIQUE, RICARDO, TOMAS)

Conjuntos equivalentes

Los conjuntos idénticos son también equivalentes. Ser equivalentes significa que hay tantos elementos en un conjunto como en el otro. Dos conjuntos pueden ser equivalentes sin ser idénticos. El criterio para determinar la equivalencia es la correspondencia biunívoca.

EJEMPLO

A = {1, 3, 5, 7}   B = {2, 4, 6, 8}

Estos dos conjuntos pueden aparearse en correspondencia biunívoca.

A = 1, 3, 5, 7
↕ ↕ ↕ ↕
B = 2, 4, 6, 8

Pueden aparearse también en muchas otras formas, pero lo esencial es que exista al menos una forma de aparearlos. Por tanto, los dos conjuntos son equivalentes; pero no son idénticos, puesto que sus elementos son totalmente diferentes.

Para indicar la equivalencia úsase el símbolo especial.



EJEMPLO

A ⇔ B (Léase el conjunto A es equivalente al conjunto B)

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos que no tienen ningún elemento común se denominan disjuntos. Tal como acabamos de ver, dos conjuntos disjuntos pueden ser equivalentes, pero nunca podrán ser idénticos.

EJEMPLOS

A = {x, y, z}   B = {a, b, c}   A ⇔ B

G = {1, 3, 5, 7}   H = {9, 11, 13}
G y H no son equivalentes.

Conjuntos no idénticos

En el ejemplo anterior, los conjuntos G y H constituyen un caso de conjuntos que ni son idénticos ni son equivalentes. Un conjunto que es subconjunto de otro, constituye, con el segundo, un tercer ejemplo de conjuntos no idénticos.

EJEMPLOS

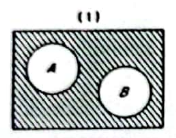
1. A = {1, 3, 5} B = {8, 10, 12} Disjuntos equivalentes.

2. C = {7, 9, 11} D = {7, 9, 19, 21} Tienen algunos elementos comunes.

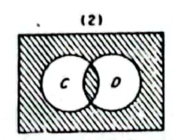
3. E = {13, 15, 17} F = {13, 17} F ⊂ E (F es subconjunto de E).

Estas relaciones pueden ilustrarse gráficamente por medio de diagramas de Venn.

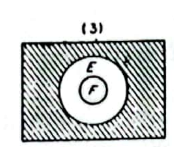
(1)



(2)



(3)



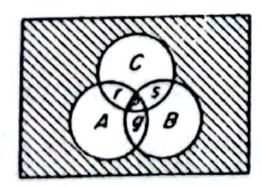
Considérense ahora los tres conjuntos siguientes:

A = {a, g, p, r}

B = {g, s, j, p}

C = {p, r, s, t}

Las relaciones entre estos conjuntos pueden mostrarse sobre un solo diagrama de Venn.



A y *B* tienen los elementos *g* y *p* en común
B y *C* tienen los elementos *p* y *s* en común
A y *C* tienen los elementos *p* y *r* en común
A, *B* y *C* tienen el elemento *p* en común

p es un elemento común a los tres conjuntos.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Unión de conjuntos

Cuando se forma un tercer conjunto con todos los elementos contenidos en uno u otro de dos conjuntos, este tercer conjunto se denomina unión de los otros dos.

EJEMPLOS

A = {p, g, r, s} B = {a, b, c}

D = {a, b, c, p, g, r, s}

El conjunto D es la unión de los conjuntos A y B
El símbolo para indicar unión es U

EJEMPLO

{p, g, r, s} U {a, b, c} = {p, g, r, s, a, b, c}

A U B = {p, g, r, s, a, b, c}

A U B = D (la unión de A y B es D)

Si algunos de los elementos son comunes a los dos conjuntos, solo es necesario incluirlos una vez en la unión.

EJEMPLOS

A = {1, 3, 5, 6} B = {2, 3, 4, 6}.

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Aunque los elementos 3 y 6 están tanto en el conjunto A como en el B, solo se incluyen una vez en la unión de los dos.

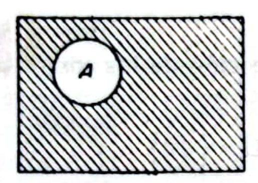
La unión de dos conjuntos puede indicarse claramente en un diagrama de Venn, sombreando el conjunto unión.

$$\bar{A}$$

Para este ejemplo, se tendría entonces: A = { lunes, miércoles} Ā = { martes, jueves, viernes, sábado, domingo}. Otra manera equivalente de escribir lo mismo sería:

$\overline{\{\text{lunes, miércoles}\}} = \{\text{martes, jueves viernes, sábado, domingo}\}$

Mostremos el complemento de un conjunto por medio de un diagrama de Venn:



El rectángulo representa el universo. Luego, el área rayada es Ā.

EJEMPLO

P = {1, 2, 3, 4}
P̄ = {5, 6, 7, . . .}

El complemento de P está constituido por todos los números enteros diferentes a los contenidos en P. En este caso el universo es infinito, como lo indican los puntos suspensivos, y así lo es también P̄.

RESUMEN

Simbología

{x, y}(llaves)	se usan para encerrar la lista de elementos de un conjunto.
. . .	conjuntos infinitos.
∅	conjunto vacío o nulo
∈	es un elemento de un conjunto
∉	no es un elemento de un conjunto
⊂	es un subconjunto de un conjunto
=	el conjunto X contiene los siguientes elementos: dos conjuntos idénticos.
⇔	indica equivalencia de dos o mas conjuntos
∪	unión de dos conjuntos
∩	intersección de dos conjuntos
Ā (barra)	complemento de un conjunto

Terminología

1. Términos aplicables a conjuntos:

finitos	con límites definidos.
infinitos	sin límites.
vacío	sin ningún elemento.
universal	la totalidad dentro de la cual existe un conjunto (o conjuntos).
disjuntos	sin elementos comunes.
idénticos	dos (o más) conjuntos con exactamente los mismos elementos.
equivalentes	correspondencia biunívoca entre conjuntos.

2. Un subconjunto contiene algunos de los elementos de otro conjunto mayor que él.

3. Un conjunto puede contener algunos de los elementos de otro conjunto más otros elementos extraños.

4. La unión de dos conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos contenidos en uno u otro de ellos.

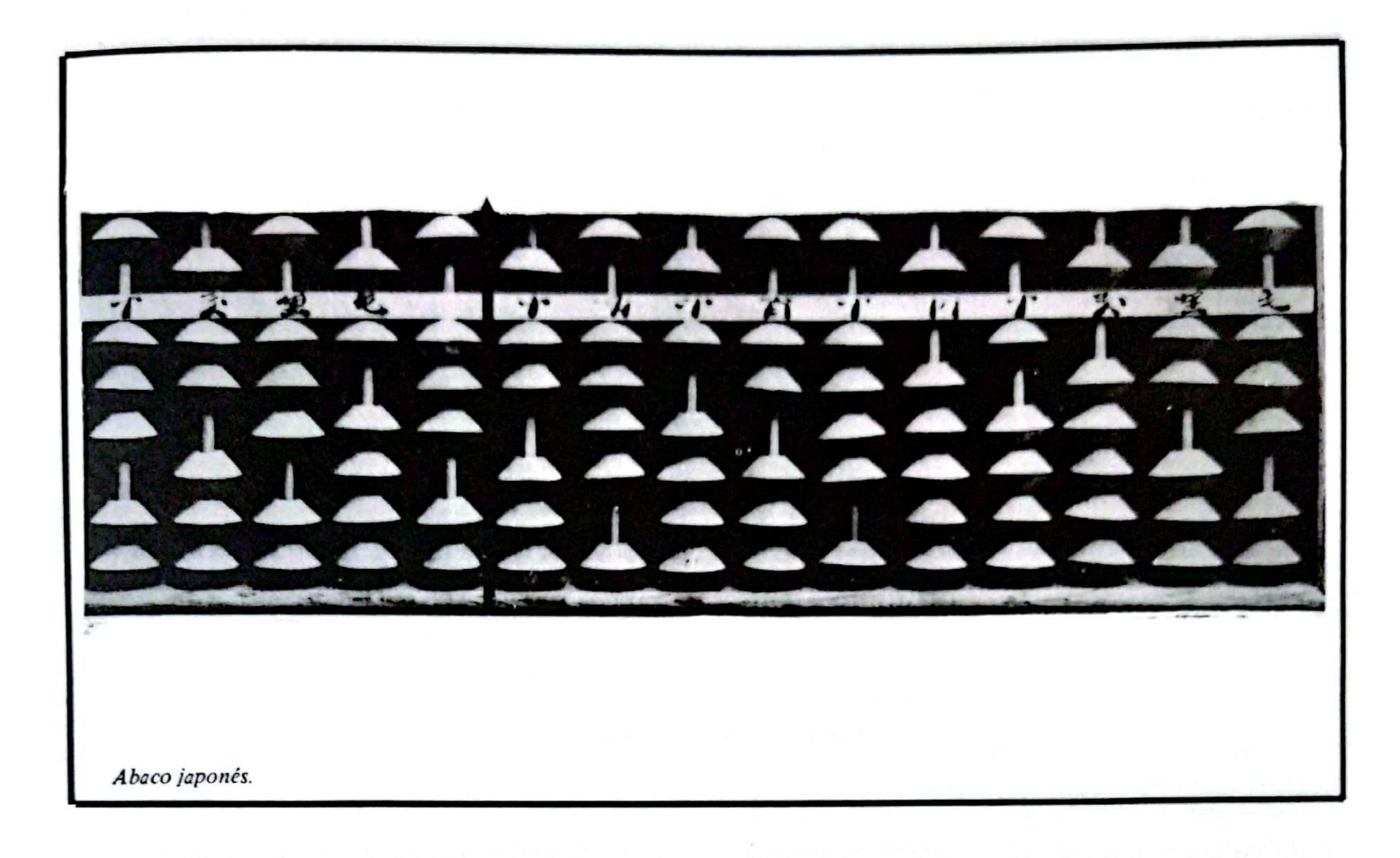
5. La intersección es el conjunto formado por elementos comunes a dos conjuntos.

6. El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos del conjunto universal no incluidos en el conjunto original.



PVS A·
RITH·
TICAE·
BOETIVS
RAS
TAGO
PY

Pintura del siglo XVI. Dos hombres calculando.



Abaco japonés.

SISTEMAS DE NUMERACION

INTRODUCCION

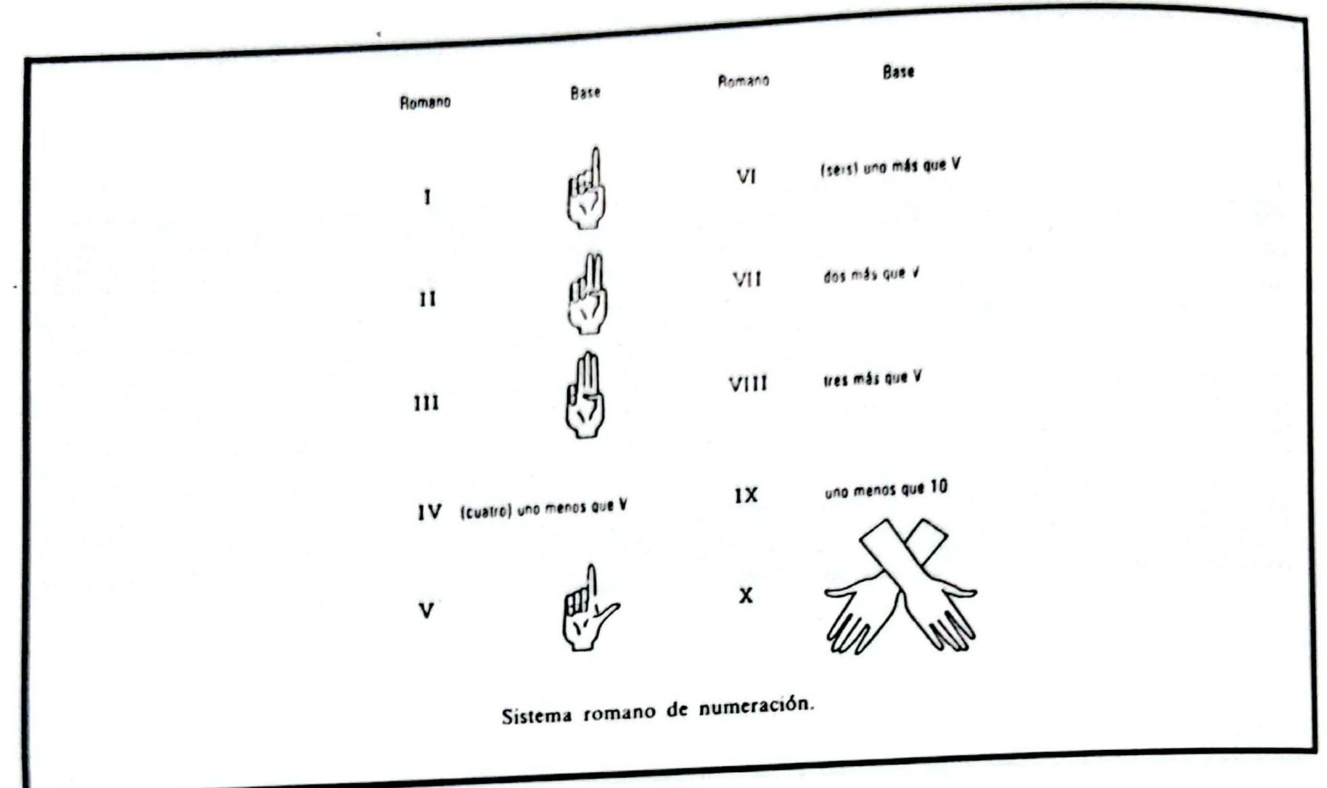
Desde la más remota antigüedad la humanidad se ha valido de algún procedimiento para contar. En un principio se utilizaron palos y piedras como ayuda; también los dedos de la mano fueron utilizados con frecuencia por las civilizaciones primitivas con este mismo fin. Los pueblos indios, que utilizaban los dedos de una sola mano, crearon un sistema de numeración de *base cinco*, mientras que los mayas, que utilizaban ambas manos y los pies, crearon un sistema de *base veinte*. Los romanos apreciaron tanto el sistema de contar utilizando los diez dedos, que su sistema de numeración se basó sobre este valor.

Gran parte de nuestros actuales conceptos respecto a los números se deriva de costumbres romanas. Por ejemplo, la palabra *dígito* deriva del latín *digitus*, que significa *dedo*. Nuestro actual sistema decimal está basado en diez dígitos, en la misma forma en que los primitivos romanos basaron su sistema de numeración en los diez dedos de las manos.

La mayor diferencia entre nuestro sistema y el de los romanos radica en que éstos no incluían el cero como dígito, lo cual les obligaba a tener un símbolo diferente para cada número que quisieran expresar (por ejemplo, de existir el cero, 10 podría haberse expresado como 10 en lugar de X).

La manera de escribir los números, la forma de contar y el modo de efectuar las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) son inventos del hombre. En casi todos los países del mundo occidental se utiliza el mismo sistema de numeración, denominado sistema *indoarábigo*. Aunque este sistema se usa, desde la antigüedad, el cero solo se introdujo en el siglo noveno de nuestra era.

Fue precisamente la introducción del cero como dígito dentro del sistema indoarábigo lo que dió a éste la versatilidad necesaria para hacerlo realmente práctico, eliminando las repeticiones



Sistema romano de numeración.

y dificultades propias de los antiguos sistemas como el romano, el egipcio y otros.

SISTEMA DECIMAL DE NUMERACION

El más importante factor en el desarrollo de la ciencia y la matemática fue la invención del sistema decimal de numeración. Este sistema utiliza diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, denominados generalmente *números arábigos;* la costumbre de contar por decenas se originó probablemente en el hecho de tener el hombre diez dedos, según se ha dicho.

Se denomina *base* de cualquier sistema de numeración al número de dígitos diferentes que posee, incluyendo el cero; el sistema decimal es, pues, un sistema de *base 10.* El utilizar precisamente el 10 como base del sistema no es realmente algo esencial y cualquier otra base hubiera sido igualmente apropiada. Por ejemplo, nuestra sociedad aún usa con cierta frecuencia el sistema *duodecimal* (base 12), como ocurre en los relojes, el sistema inglés de medidas, la venta por docenas, etc.

Aunque es cierto que el concepto del cero simplificó notablemente la operación de contar y el manejo de los números, existe otro concepto igualmente importante: el de *posición,* según el cual, el *valor* de cada dígito depende de su posición.

EJEMPLO

```
2 6 5 2
↑ ↑ ↑ ↑__posición de unidades (2 x 1)
│ │ └────posición de decenas  (5 x 10)
│ └──────posición de centenas (6 x 100)
└────────posición de millares (2 x 1000)
```

El 2 en la posición de millares tiene un valor diferente al del 2 en la posición de unidades. Esta diferencia de valores se aprecia claramente cuando leemos el valor del número: dos mil seiscientos cincuenta y dos.

Así, pues, cada dígito de una sucesión tiene un *valor digital* y un *valor de posición* o *valor relativo.*

valor digital 2; valor de posición 1000

```
↓    ┌──valor digital 6, valor de posición 100
2   6  5   2 ←— valor digital 2, valor de posición 1
       ↑
       valor digital 5, valor de posición 10
```

Obsérvese que los valores de posición de los dígitos aumentan según las potencias crecientes de 10, de derecha a izquierda. La posición de unidades tiene un valor de 1; la posición de decenas tiene un valor de 10 x 1; la posición de centenas tiene un valor de 10 x 10 x 1; etc. El número del ejemplo anterior podría escribirse:

$$2652 = 2 \times (10 \times 10 \times 10 \times 1) + 6 \times (10 \times 10 \times 1) + 5(10 \times 1) + 2 \times 1$$

La anterior notación, aunque correcta, es poco práctica; reemplazándola, por lo común, recurriendo a la forma abreviada llamada *exponenciación.* Llámase *exponente* la cifra, escrita arriba y a la derecha de un número, la *base*, que indica cuántas veces debe repetirse esa base como factor en la expresión que se está escribiendo.

$$2652 = 2 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

$2 \times 10^0 =$	2
$5 \times 10^1 =$	50
$6 \times 10^2 = 6 \times (10 \times 10) =$	600
$2 \times 10^3 = 2 \times (10 \times 10 \times 10) =$	2000
	2652

Es decir:

10^0 significa simplemente 1
10^3 significa 10 x 10 x 10 x 1
10^5 significa 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 1

El exponente se denomina también *potencia* de la base.

Todos nos hemos acostumbrado al sistema decimal desde la primera infancia y lo utilizamos casi automáticamente en las operaciones aritméticas.

Del estudio anterior podemos derivar las siguientes definiciones.

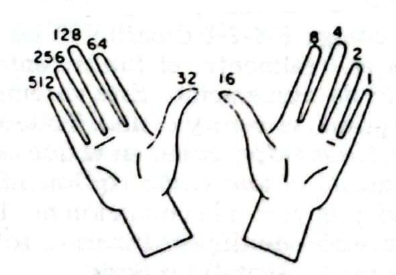
1. Un sistema de numeración es un medio para indicar el número de *unidades* contadas.
2. La *base* de un sistema de numeración es igual al número de dígitos que utiliza, incluyendo el cero.
3. Todos los sitemas modernos de numeración incluyen el *cero.*
4. Un *número* es un símbolo arbitrario que representa cierta cantidad de unidades.
5. Una *unidad* es el patrón con que se realiza el contar.
6. El término *cantidad* se refiere a la vez a una *unidad* y un *número* (de unidades).

Nota: Es fácil determinar el exponente que corresponde a una posición de dígito determinada contando el número de posiciones que quedan a la derecha del dígito en cuestión.

SISTEMA BINARIO DE NUMERACION

Puesto que los dedos son simplemente un instrumento básico para contar, cualquier principio aplicable a los dedos es también a instrumentos de contar más complicados.

Puede demostrarse matemáticamente que la manera más eficiente de usar los dedos para contar es aquella en que el valor asignado a cada dedo es el doble del atribuido al anterior.



Código 8 - 4 - 2 - 1

Este código suele denominarse *código 8-4-2-1*, por ser éstos los cuatro primeros valores de la serie y podría utilizarse para contar, usando ambas manos, desde cero hasta un máximo de 1,023; en total, 1.024 valores incluyendo el cero:

$$512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1023 + 1 = 1024$$

En general, no es fácil darse cuenta de la importancia de los sistemas de númeración no decimales. Estamos tan acostumbrados a utilizar el sistema decimal, que se nos ha convertido en una segunda naturaleza y cualquier otro sistema resulta extraño y difícil. Como tendremos oportunidad de comprobarlo, los otros sistemas son difíciles, solo porque son extraños.

Los tres sistemas que discutiremos además (binario, octal y hexadecimal) son muy importantes, y, con un poco de estudio, nos daremos cuenta de que todos ellos son tan simples como el sistema decimal. Basta comprender bien algunas reglas básicas para que esos sistemas resulten perfectamente lógicos.

En el sistema binario se utilizan solo dos dígitos, cero y uno. Para que el sistema sea práctico es necesario inventar un código (que utilice únicamente el cero y el uno) que permita representar cualquier cantidad. Podría fácilmente desarrollarse un código arbitrario, pero puesto que deseamos que sea eficiente, utilizaremos el código 8-4-2-1. En las siguientes páginas presentaremos los detalles de este código y algunas maneras de usarlo.

Como contar en el sistema binario

El código 8-4-2-1 descrito en las páginas anteriores es, realmente, el fundamento del sistema binario de numeración. Este sistema utiliza solo dos dígitos, el cero y el uno. Trátase de un código de *dos estados*, como en el que se escoge arbitrariamente *el uno* como equivalente a la condición *sí* y el *cero* a la condición *no*. Por tanto, en una sucesión de dígitos binarios, solo tienen valor propio (o digital) los *unos*..

La posición de cada *uno* (referido al código 8-4-2-1) nos da la clave para saber qué valor representa, como se muestra en la siguiente figura. Es

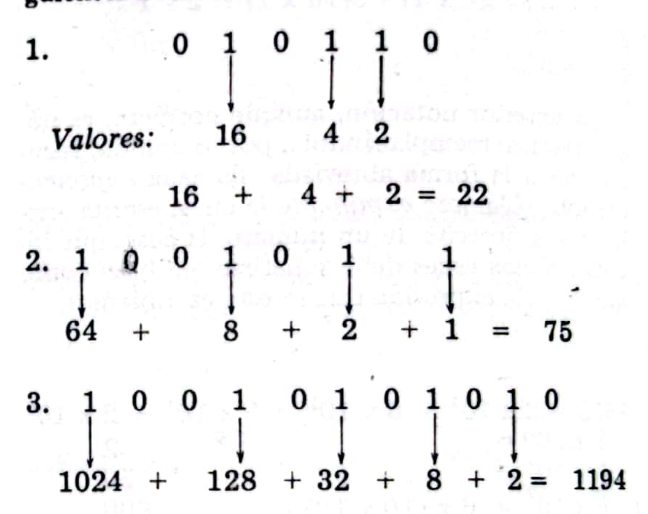
Valor de código	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	Tome en cuenta sólo los unos
	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	= 20 (16 + 4)
	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	= 37 (32 + 4 + 1)
	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	= 27 (16 + 8 + 1)

Valores de código del código 8 - 4 - 2 - 1.

importante notar que los valores asignados a cada posición binaria se inician en el extremo *derecho* y progresan hacia la *izquierda*. (Si se invirtiera este orden, los resultados serían totalmente diferentes.) La posición de la extrema derecha es, pues, la del dígito menos significativo y la del extremo izquierdo la del dígito más significativo. Nótese que éste es exactamente el caso en el sistema decimal, en el cual la posición extrema izquierda es la más significativa.

EJEMPLOS

¿Cuál es el valor decimal de cada uno de los siguientes números binarios?



1. 0 1 0 1 1 0

Valores: 16 4 2

16 + 4 + 2 = 22

2. 1 0 0 1 0 1 1

64 + 8 + 2 + 1 = 75

3. 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0

1024 + 128 + 32 + 8 + 2 = 1194

Paso 1: Hállase el valor de posición de cada uno de los 1. (Véase código de valores en la figura.)

Paso 2: Súmense estos valores. Obsérvese que los valores de posición de los números binarios se duplican cada vez que nos movemos una posición hacia la izquierda. Cada valor es el doble del que le antecede por la derecha.

Convierta los siguientes números decimales a binarios.

1. 61_{10}

Valores: 32

1

Valores: [32] [16]

1 1 (total 48)

Valores: [32] [16] [8] [4] [2] [1]

1 1 1 1 0 1

32 + 16 + 8 + 4 + 1 = 61

2. 28_{10} Valores: [16] [8] [4] [2] [1]

1 1 1 0 0

3. 9_{10} Valores: [8] [4] [2] [1]

1 0 0 1

Paso 1: Hállese aquel valor de posición igual o inmediatamente menor que el valor que se desea convertir. Colóquese un ≪ 1 ≫ en esta posición.

Paso 2: Tómese el valor de la posición inmediatamente inferior, súmese al valor que ya se tiene y obsérvese si el total es igual o menor al valor deseado. Si es así, colóquese un 1 en esa posición; en caso contrario, colóquese un 0.

Paso 3. Continúese en la misma forma hasta alcanzar el total deseado, colocando ceros en todas las posiciones no utilizadas.

EJEMPLOS

Convierta los siguientes números decimales a binarios.

1. 22

32	16	8	4	2	1
	1	0	1	1	0

22 = 010 110

2. 76

64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	1	0	0

76 = 001 001 100

En la sucesión 8-4-2-1 (ver cuadro "valores de código, del código 8-4-2-1", encuéntrase el mayor número de valor inferior al que se va a convertir, e iniciando con este número continúese añaniendo los siguientes hasta llegar al número requerido, sin sobrepasarlo. Añádanse ceros a la izquierda del dígito más significativo hasta completar un último grupo de tres dígitos binarios. Estos ceros se añaden para que todos los grupos tengan exactamente tres dígitos.

Aritmética binaria. Suma o adición

Para ejecutar las operaciones aritméticas elementales solo es necesario observar unas pocas reglas:

SUMA:

Regla 1: Cero más cero es igual a cero.

Regla 2: Cero más uno es igual a uno. (Uno más cero es también igual a uno.)

Regla 3: Uno más uno es igual a cero, con el *transporte* de uno a la posición izquierda inmediata.

La suma de dos números binarios es muy similar a la de dos números decimales. Sumemos, por ejemplo, 276 y 345:

```
 11 (transportes)
276 (primer sumando)
345 (segundo sumando)
───
621 (suma)
```

Cuando quiera que la suma de los dos dígitos de una columna es mayor que 9, solo se anota el dígito de unidades en ≪ suma ≫, pero el dígito de decenas se ≪ transporta ≫ a la columna izquierda inmediata. El proceso binario es esencialmente el mismo, como se verá en los ejemplos siguientes.

EJEMPLOS

1. Sumemos 4 + 3 en binario (100 + 011):

	cuatros	doses	unos	(transportes)
	1	0	0	(4)
+	0	1	1	(3)
	1	1	1	(4 + 2 + 1 = 7)

Se aplica en todos los casos la Regla 2.

2. Sumemos 7 + 6 (111 + 110):

ochos	cuatros	doses	unos	(transportes)
1	1			
	1	1	1	(7)
	0			
	1	1	0	(6)
1	1	0	1	(8 + 4 + 1 = 13)

En la columna de los unos se aplica la Regla 2. En la columna de los dos, se aplica la Regla 3. El transporte, a la columna de los cuatros, es 1. En esta última columna se procede en dos pasos: primero, 1 + 1 = 0, con el transporte de un 1 a la columna de los ochos; segundo, el 0 (resultante del primer paso) + 1 (del primer transporte) = 1. Finalmente, en la columna de los ochos solo tenemos el 1 proveniente del transporte anterior.

Aritmética binaria. Resta o sustracción.

Las reglas para la resta binaria son las siguientes:

RESTA:
- Regla 1: *Cero menos cero es igual a cero.*
- Regla 2: *Uno menos uno es igual a cero.*
- Regla 3: *Uno menos cero es igual a uno.*
- Regla 4: *Cero menos uno es igual a uno, pero se roba uno de la columna izquierda inmediata.*

EJEMPLOS

1. Restemos 15 − 7.

(columna)	dieciséis	ochos	cuatros	doses	unos	(robos)
	0	1	1	1	1	(= 15)
−	0	0	1	1	1	(= 7)
	0	1	0	0	0	(= 8)

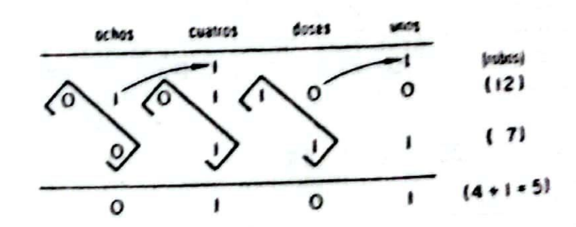
Se aplica la Regla 2 en las columnas de los unos, los doses y los cuatros. En la columna de los ochos se aplica la Regla 3 y en la de los dieciséis la Regla 1.

2. Restemos 12 − 4.

	ochos	cuatros	doses	unos	(robos)
	1	1	0	0	(12)
−	0	1	0	0	(4)
	1	0	0	0	(= 8)

En estos ejemplos, solo se han aplicado las Reglas 1, 2 y 3. Veamos ahora un ejemplo de aplicación de la Regla 4.

3. Restemos 12 − 7.



En la columna de los unos se aplica la Regla 4, pero como no hay 1 en la columna de los doses, debemos tomarlo en la columna de los cuatros, para lo cual basta con cambiar el uno por cero en la columna de los cuatros y el cero por uno

en la columna de los doses. Ahora, en la columna de los doses (1 — 1) se aplica la Regla 2. En la columna de los cuatros, tenemos 0 — 1, por lo que hay que aplicar nuevamente la Regla 4, robando un 1 de la columna de los ochos, donde queda un cero. Finalmente, en esta columna, 0 — 0 = 0 (Regla 1).

Para la multiplicación y la división aplícanse reglas similares, pero con ciertas diferencias. Estas operaciones no son más que sucesiones de sumas o de restas.

Cálculo con complementos

La resta puede lograrse por medio de la suma de complementos. Exploremos el significado de esta afirmación en el sistema decimal antes de pasar el binario. El *complemento de 10* de un número dado es la diferencia entre dicho número y 10 o la potencia de 10 inmediatamente superior.

EJEMPLOS

El complemento a 10 de 4 es 10 — 4 = 6
El complemento a 10 de 7 es 10 — 7 = 3
El complemento a 10 de 35 es 100 — 35 = 65
El complemento a 10 de 362 es 1000 — 362 = 638

Otro sistema usado con frecuencia es el complemento de 9, igual a la diferencia entre el número dado y 9 o una sucesión de tantos nueves como cifras tenga el número.

EJEMPLOS

El complemento a 9 de 4 es 9 — 4 = 5
El complemento a 9 de 7 es 9 — 7 = 2
El complemento a 9 de 48 es 99 — 48 = 51

Tratemos ahora de efectuar algunas restas usando complementos tanto de 10 como de 9.
Restar 42 de 68.

Resta normal

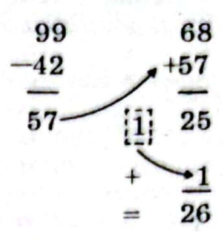
68
— 42
26

Resta por medio del complemento de 10

100 — 42 = 58; 68 + 58 = [1]26

Elimínese el dígito de orden más alto que aparece al sumar el complemento

Resta por medio del complemento de 9



Cuando se usan complementos de 9, el dígito adicional que resulta no se elimina, sino que se suma a la posición de unidades. Este procedimiento se conoce como *transporte cíclico*.
Restar 3 de 7.

Por medio del complemento a 10

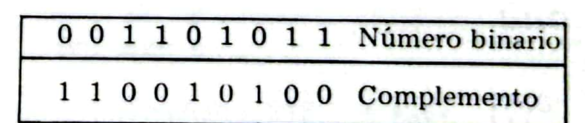
10 — 3 = 7; 7 + 7 = [1]4 ← elimine

Por medio del complemento a 9

9 — 3 = 6; 7 + 6 = [1]3; + 1 = 4

En el sistema binario se utilizan complementos de 1 y complementos de 2. Estos complementos son sencillísimos, ya que solo existen dos cifras: 0 y 1. Para hallar el complemento de 1 de un número binario hasta cambiar todos los ceros por unos y todos los unos por ceros.

EJEMPLO



0 0 1 1 0 1 0 1 1	Número binario
1 1 0 0 1 0 1 0 0	Complemento

SISTEMA OCTAL DE NUMERACION

Hemos dicho ya que el sistema binario es un sistema de *base dos*. El sistema octal es un sistema de *base ocho* y su uso resulta muy conveniente, como veremos, para abreviar el sistema binario.

Al ser un sistema de base ocho, se utilizarán solo las cifras desde 0 hasta 7. En la siguiente figura vemos los primeros números escritos en este sistema (obsérvese que no aparecen las cifras 8 y 9).

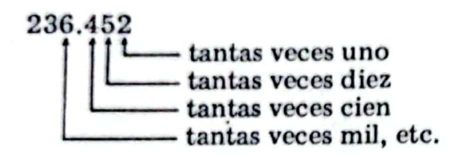
DECIMAL	OCTAL	DECIMAL	OCTAL	DECIMAL	OCTAL
0	0	8	10	16	20
1	1	9	11	17	21
2	2	10	12	18	22
3	3	11	13	19	23
4	4	12	14	20	24
5	5	13	15	21	25
6	6	14	16	22	26
7	7	15	17	23	27

Conversión de decimal a octal.

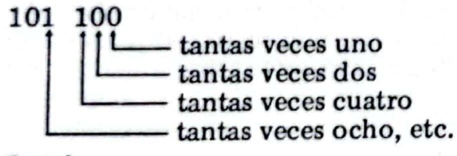
Al escribir un número en octal, se suele indicar el sistema en la forma siguiente: 376_8. El *subíndice* 8 indica que 376 es un número octal.

Tal como en los sistemas decimal y binario, el valor de posición de cada dígito de una sucesión es fijo.

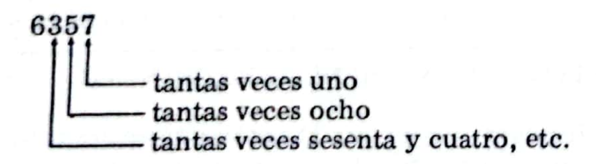
Decimal



Binario



Octal



El sistema de base ocho (octal) puede ilustrarse utilizando las potencias de la base, como se indica a continuación:

$$375_8 = 3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$
$$1246_8 = 1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 6 \times 8^0$$

Nombres de los sistemas de numeración con bases desde 2 hasta 20

Base	*Nombre*
2*	binario puro
3	ternario
4	cuaternario
5	quinario
6	senario
7	septenario
8*	octal
9	nonario
10*	decimal
11	undecimal
12	duodecimal
13	tridecimal
14	cuatridecimal
15	quindecimal
16*	sexadecimal (hexadecimal)
17	septadecimal
18	octodecimal
19	nonodecimal
20	vigesimal

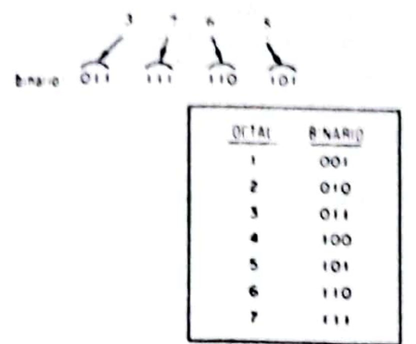
* Sistemas estudiados en este capítulo

Conversiones de octal a binario

La relación entre el sistema octal y el binario es tan simple, que la conversión puede efectuarse casi instantáneamente. Consideremos las cifras del número binario en grupos de tres (001010101 = 001 010 101); ahora bien, cada grupo de tres dígitos binarios incluye una posición de unidades, una posición de "veces dos" y una de "veces cuatro", cuya suma da lugar a un dígito octal.

$$\underbrace{0\ 0\ 1}\quad \underbrace{0\ 1\ 0}\quad \underbrace{1\ 0\ 1}$$

Recíprocamente, cada dígito octal da lugar a tres dígitos binarios como se indica en la figura siguiente. La representación binaria dígito por dígito de números octales se suele denominar *octal codificado en binario.*



OCTAL	BINARIO
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Conversión de octal a binario

Conversión de octal a decimal

Para practicar esta conversión, recúrrese frecuentemente a una tabla de conversión, pero también puede efectuarse manualmente en la forma siguiente:

Multiplíquese el dígito del extremo *izquierdo* del número octal por ocho; súmese al resultado el siguiente dígito y multiplíquese esta suma nuevamente por ocho; continúese así hasta llegar al último dígito. Después de la última suma no se efectúa multiplicación.

EJEMPLOS

1. $3327_8 = ?_{10}$

```
  3327₈
 × 8
   24
 + 3
   27
 × 8
  216
 + 2
  218
 × 8
 1744
 + 7
 1751₁₀
```

Resultado ($3327_8 = 1751_{10}$)

2. $426_8 = ?_{10}$

```
  426₈
 × 8
   32
 + 2
   34
 × 8
  272
 + 6
  278₁₀
```

Resultado ($426_8 = 278_{10}$)

Conversión de decimal a octal

Generalmente, esta conversión se efectúa también refiriéndose a una tabla, pero puede lograrse manualmente en la forma siguiente:

Divídase el número decimal por ocho, anotando el cociente y el residuo. Vuélvase a dividir el cociente por ocho y anótese el nuevo residuo. Repítase el procedimiento mientras sea posible. El *equivalente octal* estará formado por el último cociente (menor que 8) como primera cifra de la izquierda, seguido por cada uno de los residuos, iniciando con el último y terminando con el primero.

EJEMPLOS

1. $1751_{10} = ?_8$

```
1751   8
 15    218  8
 71     58  27  8
  7←—   2←  3←3
```

Resultado: $1751_{10} = 3327_8$

2. $278_{10} = ?_8$

```
278   8
 38   34   8
  6←  2 2← 4
```

Resultado: $278_{10} = 426_8$

3. $15273_{10} = ?_8$

```
15273 8
  72   1909 8
  073   30  238  8
             69  78  29  8
    1←——5←  6←  5←3
```

Resultado: $15273_{10} = 35651_8$

SISTEMA HEXADECIMAL DE NUMERACION

Hemos discutido ya en algún detalle los sistemas decimal, binario y octal. Debemos discutir en algún detalle el sistema hexadecimal. El hexadecimal es un sistema de *base/16*. Como digitos se utilizan las cifras 0 a 9 (tal como el sistema decimal), seguidas por las letras A hasta F, que representan los valores decimales 10, 11, 12, 13, 14 y 15. Examinemos la Tabla siguiente para comparar estos tres sistemas de numeración.

Equivalentes hexadecimales

Decimal	*Binario*	*Hexadecimal*
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1
2	0 0 1 0	2
3	0 0 1 1	3
4	0 1 0 0	4
5	0 1 0 1	5
6	0 1 1 0	6
7	0 1 1 1	7
8	1 0 0 0	8
9	1 0 0 1	9
10	1 0 1 0	A
11	1 0 1 1	B
12	1 1 0 0	C
13	1 1 0 1	D
14	1 1 1 0	E
15	1 1 1 1	F

EJEMPLOS

1. Binario: 1 0 1 1 ← base 2
2. Decimal: 208_{10} ← base 10
3. Hexadecimal: $7E_{16}$ ← base 16
4. Hexadecimal: 46_{16} ← base 16

El subíndice para números binarios se suele omitir, ya que normalmente es obvio que se trata de un número binario (una larga sucesión de ceros y unos), pero cuando se usan otros sistemas es conveniente indicar de cuál se trata.

RESUMEN

Simbología

Reglas para la suma binaria:

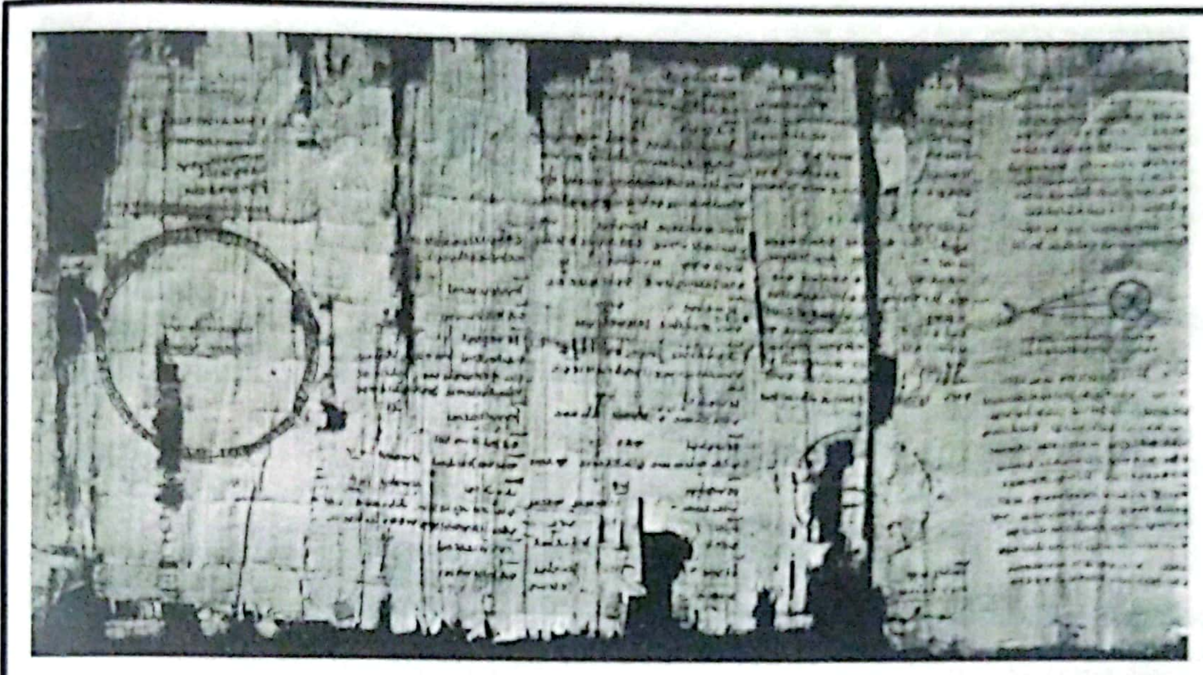
$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 0$ y se transporta 1

Reglas para la resta binaria:

$0 - 0 = 0$
$1 - 1 = 0$
$1 - 0 = 1$
$0 - 1 = 1$ robando 1 de la izquierda.

Terminología

Base	de un sistema de numeración es el número de símbolos que posee, incluyendo el cero.
Exponente	número pequeño que se coloca sobre un símbolo o número para indicar una potencia de esa cantidad (por ejemplo, A^2, A^1, A^0).
Cantidad	se refiere a una unidad y un número de unidades.
Binario	sistema de numeración de base dos
Octal	sistema de numeración de base ocho.
Hexadecimal	sistema de numeración de base dieciséis.
Subíndice	número pequeño que se coloca debajo de un símbolo o número para indicar la base de numeración en que está representado (por ejemplo, 45_8, 150_{10}).



Parte de un papiro astronómico egipcio (s. IV - II a. J.C.).

ALGEBRA

En este apartado se representan los principios básicos y las reglas mas importantes del Algebra, seguidas de ejemplos.

OPERADORES

Llámase *operador* a un símbolo matemático que representa un proceso, también matemático, que ha de efectuarse sobre uno o más *operandos* asociados con él.

```
┌─operador
↓
A + B
↑   ↑
└─┬─┘
  └─operandos
```

Existen tres clases de operadores: operadores aritméticos, operadores lógicos y operadores relacionales: cada clase posee sus símbolos propios.

1. Operadores *aritméticos*.

Suma +
Resta —
Multiplicación x Con frecuencia se omite el operador cuando se trata de indicar multiplicación de dos letras (por ejemplo, *AB* equivale a *A x B*).
División : (o también /)
Exponente (potencia de un número) Se indica por medio de un superíndice (por ejemplo, B^0, B^1, B^2, etc.).

2. Operadores lógicos.

Y •
O +
NO – (o bien ´) (por ejemplo, $\bar{A}$ significa NO *A*)

Los operadores lógicos se usan en álgebra booleana y en lógica simbólica y se discutirán en los apartados correspondientes.

3. Operadores *relacionales*. Por medio de éstos se expresan relaciones entre dos entidades.

Mayor que	$>$
Menor que	$<$
Igual a	$=$
Desigual a	$\neq$
Menor que o igual a	$\leqslant$
Mayor que o igual a	$\geqslant$

EJEMPLOS

$A > B$	A es mayor que B
$A < B$	A es menor que B
$A = B$	A es igual a B
$A \neq B$	A es desigual a B
$A \geqslant B$	A es mayor que o igual a B

NUMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Los signos más y menos se utilizan también para indicar números positivos y negativos.

EJEMPLOS

+ 27 o 27	(Si el número es positivo puede omitirse el signo + .)
- 27	(los números negativos deben ir siempre precedidos por el signo —.)

Reglas algebraicas para la suma

1. La suma de dos números positivos es igual a la suma, con signo más de los valores correspondientes.
2. La suma de dos números negativos es igual a la suma de los valores correspondientes con signo menos.
3. La suma de dos números de diferentes signos (+ , —) es igual a la *diferencia de los valores* con el signo del número mayor.

$$\begin{array}{r} +2 \\ +2 \\ \hline +4 \end{array} \quad \begin{array}{r} -2 \\ -2 \\ \hline -4 \end{array} \quad \begin{array}{r} +2 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} +3 \\ -1 \\ \hline +2 \end{array} \quad \begin{array}{r} +2 \\ -6 \\ \hline -4 \end{array}$$

Reglas algebraicas para la resta

Las reglas de la resta son semejantes a las de la suma, excepto que debe *cambiarse* el signo del sustraendo y luego *sumarse* al minuendo.

Minuendo:	+ 2 =	+ 2	+ 2 =	+ 2	− 4 =	− 4	+ 7 =	+ 7
Sustraendo:	−(+2)	− 2	−(− 2)	+ 2	−(+6)	− 6	−(+ 2)	− 2
Diferencia:		0		+4		−10		+ 5

Reglas algebraicas de la multiplicación

1. El producto de dos números del mismo signo da un resultado con signo más.
2. El producto de dos números de diferente signo da un resultado con signo menos.

$$\begin{array}{r} +2 \\ +9 \\ \hline +18 \end{array} \quad \begin{array}{r} -9 \\ -2 \\ \hline +18 \end{array} \quad \begin{array}{r} -9 \\ +2 \\ \hline -18 \end{array} \quad \begin{array}{r} +9 \\ -2 \\ \hline -18 \end{array}$$

Reglas algebraicas de la división

Las reglas de la división son idénticas a las de la multiplicación.

1. La división de dos números del mismo signo da un resultado con signo más.
2. La división de dos números de diferentes signo da un resultado con signo menos.

$$-6 \,\underline{|-3} \quad +6 \,\underline{|+3} \quad +6 \,\underline{|-3} \quad -6 \,\underline{|+3}$$
$$+2 \qquad\quad +2 \qquad\quad -2 \qquad\quad -2$$

Operaciones aritméticas sucesivas

Cuando se tienen varios números y operadores en sucesión, deben respetarse ciertas reglas.

1. Cuando se trata de multiplicaciones sucesivas o sumas sucesivas, las operaciones pueden efectuarse en cualquier orden sin que se altere el resultado.

EJEMPLOS

(a) $3 + 6 + 2 + 8 = 19$
Variando el orden: $6 + 3 + 8 + 2 = 19$
(b) $2 \times 4 \times 6 \times 3 = 144$
Variando el orden: $6 \times 2 \times 4 \times 3 = 144$

2. Cuando aparezcan multiplicaciones y divisiones y además sumas y restas, las multiplicaciones y divisiones deberán efectuarse primero.

EJEMPLOS

(a) $2 + 6 \times 3 = 20$
Efectuando las operaciones en el orden en que están escritas, se obtendría un resultado erróneo: $2 + 6 = 8 \times 3 = 24$.
(b) $2 + 4 : 2 = 4$
Procedimiento erróneo: $2 + 4 = 6$;
$6 : 2 = 3$

(c) $3 + \underbrace{6 \times 3} + 2 - \underbrace{1 \times 2} =$
$3 + \quad 18 \quad + 2 - \quad 2 \quad = 21$
Procedimiento erróneo: $3 + 6 = 9$;
$9 \times 3 = 27$; $27 + 2 = 29$; $29 - 1 = 28$;
$28 \times 2 = 56$

3. Si en la expresión o igualdad aparecen paréntesis, deberán efectuarse en primer término las operaciones entre ellos encerradas.

EJEMPLOS

(a) $2 + \underline{(3 \times 2)}\, 6 =$
$2 + \quad \underline{6 \times 6} =$
$2 + \quad 36 \quad = 38$

(b) $96 - 4\, \underline{(3 + 2)}\, (4) =$
$96 - \underline{4 \times 5} \times 4 =$
$96 - \quad \underline{20 \times 4} =$
$96 - \quad 80 = 16$

4. Cualquier número multiplicado por cero da cero por resultado. Un número no puede dividirse por cero.

EJEMPLOS

(a) $6 \times 0 = 0$
(b) $4 \times 2 \times 0 = 0$
(c) $8 \times 3 \times 0 = 0$

FRACCIONES

Una *fracción* es una manera de expresar que una cantidad ha sido dividida en cierto número de partes. El *numerador* indica el número de partes tomadas y el *denominador* el número de partes en las que se ha dividido la cantidad en cuestión.

$\frac{3}{4}$ tres partes de cuatro $\quad \frac{4}{4}$ cuatro partes de cuatro (igual a la unidad)

1. Es posible multiplicar por un mismo número tanto el numerador como el denominador de una fracción, sin alterar el valor de la fracción,

EJEMPLOS

(a) $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6} = \frac{4 \times 3}{6 \times 3} = \frac{12}{18}$
(simplificado $= \frac{2}{3}$)

(b) $\frac{24}{30} = \frac{24 : 2}{30 : 2} = \frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}$

Todas estas fracciones tienen exactamente el mismo valor. La regla para la multiplicación y la división no se extiende a la suma y la resta.

EJEMPLO ERRONEO

$$\frac{3}{4} \neq \frac{3+1}{4+2} = \frac{4}{5}$$

El valor cambia totalmente.

2. Si se trata de sumar o restar fracciones, deben reducirse primero a un común denominador y luego sumar o restar los numeradores.

EJEMPLOS

(a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} + \frac{6}{12} = \frac{19}{12}$

(b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12}$

(Simplificado = $\frac{1}{4}$)

3. La multiplicación de fracciones es bastante sencilla. Simplemente, multiplíquense los numeradores y los denominadores entre sí.

EJEMPLO

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1 \times 2 \times 5}{3 \times 5 \times 6} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

4. Para dividir fracciones inviértase el divisor y multiplíquese por el dividendo, de acuerdo con la Regla 3.

EJEMPLO

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{3 \times 3}{4 \times 1} = \frac{9}{4}$$

Fracciones decimales

Las fracciones decimales tienen 10 o una potencia de 10 (100, 1000, 10.000) etcétera como denominador. Cualquier fracción ordinaria puede convertirse en un número decimal dividiendo el numerador por el denominador

EJEMPLOS

(a) $\frac{4}{10} = 0.4$; $\frac{4}{100} = 0.04$; $\frac{3}{1000} = 0.003$

(b) $\frac{3}{5} =$ 3.0 |5 = 0.6

(c) $\frac{2}{3} =$ 2.00 |3 = 0.66

(Los puntos suspensivos significan que las cifras decimales continúan indefinidamente).

1. Al sumar o restar números decimales, deben alinearse las comas decimales.

EJEMPLOS

```
  26,3       0,4
   2,45      0,321
   0,342     0,5
  12,6       2,01
 ------     -----
  41,692     3,231
```

2. Al multiplicar números con decimales, el número de cifras decimales de la respuesta será igual a la suma del número de cifras decimales que tenga el multiplicando más el del multiplicador.

EJEMPLOS

```
   2,45   (dos cifras decimales)        3,052      2,04
 × 0,06   (dos cifras decimales)      × 2,32     × 0,04
 ------                               ------     ------
 0,1470   (cuatro cifras decimales)     6104     0,0816
                                       9156
                                      6104
                                     -------
                                     7,08064
```

3. Para dividir dos números decimales, se igualan las cantidades de dígitos decimales del dividendo y el divisor, agregando ceros a la derecha del que tenga menos; suprímense luego las comas decimales y se divide como si se tratase de números enteros.

EJEMPLOS

2,14 |0.3 = 214 |30   27,56 |0,45 = 2756 |45

3,275 |0,02 = 3275 |20

PROPORCIONES Y PORCENTAJES

Existe una estrecha relación entre proporciones y porcentajes y, por tanto, desarrollaremos simultáneamente las reglas para ambas operaciones.

1. Para encontrar qué proporción constituye un número dado de una suma o total, divídase el número en cuestión por el total.

EJEMPLOS

(a) ¿Qué proporción de 60 constituye 6?

6,0 | 60 = 0,1 (proporción)

(b) ¿Qué proporción de 40 constituye 16?

16,0 | 40 = 0,4

2. Para convertir una proporción a porcentaje multiplíquese la proporción por 100.

EJEMPLOS

(a) Para el ejemplo (a) anterior:

0,1 x 100 = 10o/o

(b) Para el ejemplo (b) anterior:

0,4 x 100 = 40o/o

(c) ¿Qué porcentaje de 80 constituye 20?

20,0 | 80 = 0,25 (proporción)
= 25o/o (porcentaje)

Obsérvese que para obtener el porcentaje basta simplemente mover la coma decimal de la proporción dos lugares a la derecha.

(d) ¿A qué porcentaje equivale la proporción 0,6?

0,6 x 100 = 60o/o

3. Para encontrar a qué valor es igual una proporción dada de un total, multiplíquese dicho total por la proporción.

EJEMPLO

A una reunión a la que habían sido invitadas 20 personas, asistió solamente una proporción de 0,3. ¿Cuántas personas asistieron?

0,3 x 20 = 6 personas

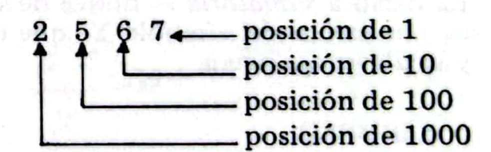
4. La suma de todos los porcentajes de un total dado debe sumar siempre 100 o/o. La suma de todas las proporciones debe sumar 1,0.

POTENCIAS

En el sistema decimal los valores de las cifras a la izquierda y a la derecha de la coma decimal aumentan con las potencias de 10. Las potencias se indican por medio de superíndices, llamados exponentes, colocados arriba y a la derecha del número o símbolo (por ejemplo, 10^1, X^2, A^4, etc.).

1. La posición de cada dígito en un número especifica la potencia de lo que le corresponde, de acuerdo con el *valor de posición* del dígito.

EJEMPLO



El número anterior también podría escribirse como:

2 x (1000) + 5 x (100) + 6 x (10) + 7 x (1)

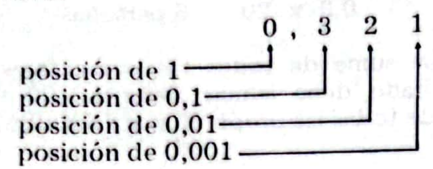
El valor de posición indica simplemente cuántas veces debe tomarse 10 como factor para alcanzar esa posición específica.

posición de 1	0 veces
posición de 10	1 vez
posición de 100	2 veces (10 x 10)
posición de 1000	3 veces (10 x 10 x 10)

Ahora es fácil determinar cómo colocar los exponentes:

$2567 = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

2. Con las posiciones a la derecha de la coma decimal, el proceso es el mismo, pero en dirección opuesta



El número anterior también podría escribirse como:

$$3 \times (\tfrac{1}{10}) + 2 \times (\tfrac{1}{100}) + 1 \times (\tfrac{1}{1000})$$

o bien

$$3 \times (0{,}1) + 2 \times (0{,}01) + 1 \times (0{,}001)$$

o por medio de potencias:

$$3 \times (10^{-1}) + 2 \times (10^{-2}) + 1 \times (10^{-3})$$

SUMATORIAS

La palabra *sumatoria* se deriva de suma. Se indica por medio del símbolo Σ que es la letra mayúscula griega *sigma.*

EJEMPLO

Supongamos que X es una *variable* que puede tomar "n" valores sucesivos indetificados por $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Entonces:

$$\Sigma X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

La sumatoria de X indica la suma de los "n" valores $X_1, X_2, \ldots X_n$.

1. La sumatoria de una *constante* (un valor que no cambia) se obtiene multiplicando la constante por "n", es decir, tomándola tantas veces cuantas aparece en la serie.

EJEMPLO

Si A es una constante (es decir, $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$)

$$\Sigma A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = nA$$

Supongamos que $A = 4$ y que $n =$ 5 (A ocurre 5 veces)

$$\Sigma A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 =$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$
$$\Sigma A = (5)(4) = 20$$

$$\Sigma (A + B + C) = \Sigma A + \Sigma B + \Sigma C$$

EJEMPLO

Verifiquemos la fórmula con valores numéricos, haciendo $n = 3$ (cada variable toma tres valores).

$$A_1 = 2 \quad A_2 = 3 \quad A_3 = -4$$
$$B_1 = 4 \quad B_2 = -2 \quad B_3 = 3$$
$$C_1 = 3 \quad C_2 = -1 \quad C_3 = 3$$

$$\Sigma (A + B + C) =$$
$$(2 + 4 + 3) + (3 - 2 - 1) + (-4 + 3 + 3)$$
$$= 9 + 0 + 2 = 11$$

$$\Sigma A + \Sigma B + \Sigma C =$$
$$(2 + 3 - 4) + (4 - 2 + 3) + (3 - 1 + 3)$$
$$= 1 + 5 + 5 = 11$$

EJEMPLO

Sea C = constante = 4, $n = 3$, X = variable ($X_1 = 6$, $X_2 = 4$, $X_3 = 3$).

(sumatoria de una constante por una variable)

$$\Sigma (CX)$$

$$\Sigma (CX) = (4 \times 6) + (4 \times 4) + (4 \times 3) =$$
$$24 + 16 + 12 = 52$$

$C \Sigma X$ (constante por la sumatoria de la variable)

$$C(\Sigma X) = (4)(6 + 4 + 3) = (4)(13) = 52$$

Por tanto:

$$\Sigma (CX) = C \Sigma X$$

4. La sumatoria del cociente de una variable dividida por una constante es igual a la sumatoria de la variable dividida por la constante. Esto puede expresarse como sigue:

$$\Sigma \left(\frac{X}{C}\right) = \frac{\Sigma X}{C}$$

EJEMPLO

Sea C = constante = 4, $n = 2$, X variable ($X_1 = 8$, $X_2 = 12$).

$$\Sigma \left(\frac{X}{C}\right) = \frac{8}{4} + \frac{12}{4} = 2 + 3 = 5$$

$$\frac{\Sigma X}{C} = \frac{8 + 12}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

ECUACIONES

La regla fundamental en relación con las ecuaciones es que toda operación que se efectúe en un miembro de la ecuación, debe también efectuarse sobre el otro. Esta regla se aplica a cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas. Así, si un miembro se divide por un número o símbolo, el otro miembro también debe dividirse por el mismo número o símbolo.

EJEMPLOS

1. *Suma*: $x = X - D$ (súmese D a ambos miembros)

Resultado: $x + D = X$

Prueba: Sea $x = 2$, $X = 4$, $D = 2$

$(x = X - D)$ $2 = 4 - 2$

$(x + D = X)$ $2 + 2 = 4$

2. *Resta*: $X = x + D$ (réstese D de ambos miembros)

Resultado: $X - D = x$

Prueba: sea $x = 2$, $X = 4$, $D = 2$

$(X = x + D)$ $4 = 2 + 2$

$(X - D = x)$ $4 - 2 = 2$

El utilizar valores numéricos para probar ecuaciones es una buena técnica, pero es importante acostumbrarse a visualizar las relaciones con símbolos únicamente.

3. *Multiplicación*:

$\frac{A}{B} = C$ (multiplíquese ambos miembros por B)

Resultado: $A = CB$

4. *División*:

$\Sigma X = ND$ *(divídanse ambos miembros por N)*

Resultado: $\frac{\Sigma X}{N} = D$

5. *Elevación al cuadrado* (llámese cuadrado de un número al producto de multiplicar dicho número por sí mismo) $4^2 = 4 \times 4 = 16$; $8^2 = 8 \times 8 = 64$.

$A = B - C$ (elévense ambos miembros al cuadrado)

Resultado: $A^2 = (B - C)^2$

Los anteriores son todos principios fundamentales cuya buena comprensión hará fácil para el estudiante la manipulación de ecuaciones.

RAIZ CUADRADA

CASOS QUE OCURREN

Pueden ocurrir dos casos: 1) Que el número dado sea menor que 100. 2) Que el número dado sea mayor que 100.

RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO MENOR QUE 100

REGLA

Se busca entre los nueve primeros números aquel cuyo cuadrado sea igual o se acerque más al número dado, y dicho número será la raíz cuadrada del número dado.

EJEMPLO

$\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$; $\sqrt{71} = 8$

porque $8^2 = 64$ y es el que más

se acerca.

REGLA PRACTICA PARA EXTRAER LA RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO MAYOR QUE 100

Se divide el número dado en grupos de dos cifras, empezando por la derecha; el último grupo, período o sección puede tener una o dos cifras. Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo o período y ésta será la primera cifra de la raíz. Esta cifra se eleva al cuadrado y este cuadrado se resta de dicho primer período. A la derecha de este resto se coloca la sección siguiente; se separa con una coma la primera cifra de la derecha y lo que queda a la izquierda lo dividimos por el duplo de la raíz hallada. El cociente representará la cifra siguiente de la raíz o una cifra mayor. Para probar si esa cifra es buena se la escribe a la derecha del duplo de la raíz hallada, y el número así formado se multiplica por la cifra que se comprueba. Si este producto se puede restar del número del cual separamos la primera cifra de la derecha, la cifra es buena y se sube a la raíz; si no se puede restar, se le disminuye una unidad o más hasta que el producto se pueda restar. Hecho esto, se resta dicho producto; a la derecha del resto se escribe la sección siguiente y se repiten las operaciones anteriores hasta haber bajado el último período.

EJEMPLO

Extraer la raíz cuadrada de 103681.

$\sqrt{10,36,81}$	321	
− 9	$3 \times 2 = 6$	
13,6	$62 \times 2 = 124$	$13 \div 6 = 2$
− 124	$32 \times 2 = 64$	
01 28,1	$642 \times 2 = 1284$	
− 641	$641 \times 1 = 641$	$128 \div 64 = 2$
0640		

EXPLICACION

Hemos dividido el número dado en grupos de dos cifras, empezando por la derecha. Extraemos la raíz cuadrada del primer período de la raíz 10, que es 3, la elevamos al cuadrado y nos da 9; este 9 lo restamos del primer período. Nos da 1 de resto. A la derecha de este 1 bajamos el segundo período 36 y se forma el número 136. Separamos la primera cifra de la derecha y queda 13,6. Lo que queda a la izquierda, 13, lo dividimos por el duplo de la raíz hallada que es 6 y nos da de cociente 2. Para ver si esta cifra es buena la escribimos al lado del duplo de la raíz y se forma el número 62 que lo multiplicamos por la misma cifra 2, siendo el producto 124.
Como este producto se puede restar de 136 lo restamos y subimos el 2 a la raíz. La resta nos da 12, le escribimos a la derecha la sección siguiente 81 y se forma el número 1281. Separamos su primera cifra de la derecha y queda 128,1 y dividimos 128 entre el duplo de la raíz 32, que es 64 y nos da de cociente 2. Para probar esta cifra la escribimos al lado del 64 y formamos el número 642 que lo multiplicamos por 2 y nos da 1284. Como este producto no se puede restar de 1281 la cifra 2 no es buena; la rebajamos una unidad y queda 1; probamos el 1 escribiéndolo al lado del 64 y formamos el número 641; este producto lo

multiplicamos por 1, nos da 641, y como 641 se puede restar de 1281 lo restamos y subimos el 1 a la raíz. 640 es el resto de la raíz.

OBSERVACION

Si al separar la primera cifra de la derecha nos encontramos con que lo que queda a la izquierda no se puede dividir por el duplo de la raíz, ponemos cero en la raíz, bajamos el período siguiente y continuamos la operación.

RESUMEN

Simbología

Operadores aritméticos

+	sume
–	reste
×	multiplique
:	divida
A^0 , A^1	exponente

Operadores lógicos:

	Y lógico
+	O lógico
—	NO lógico

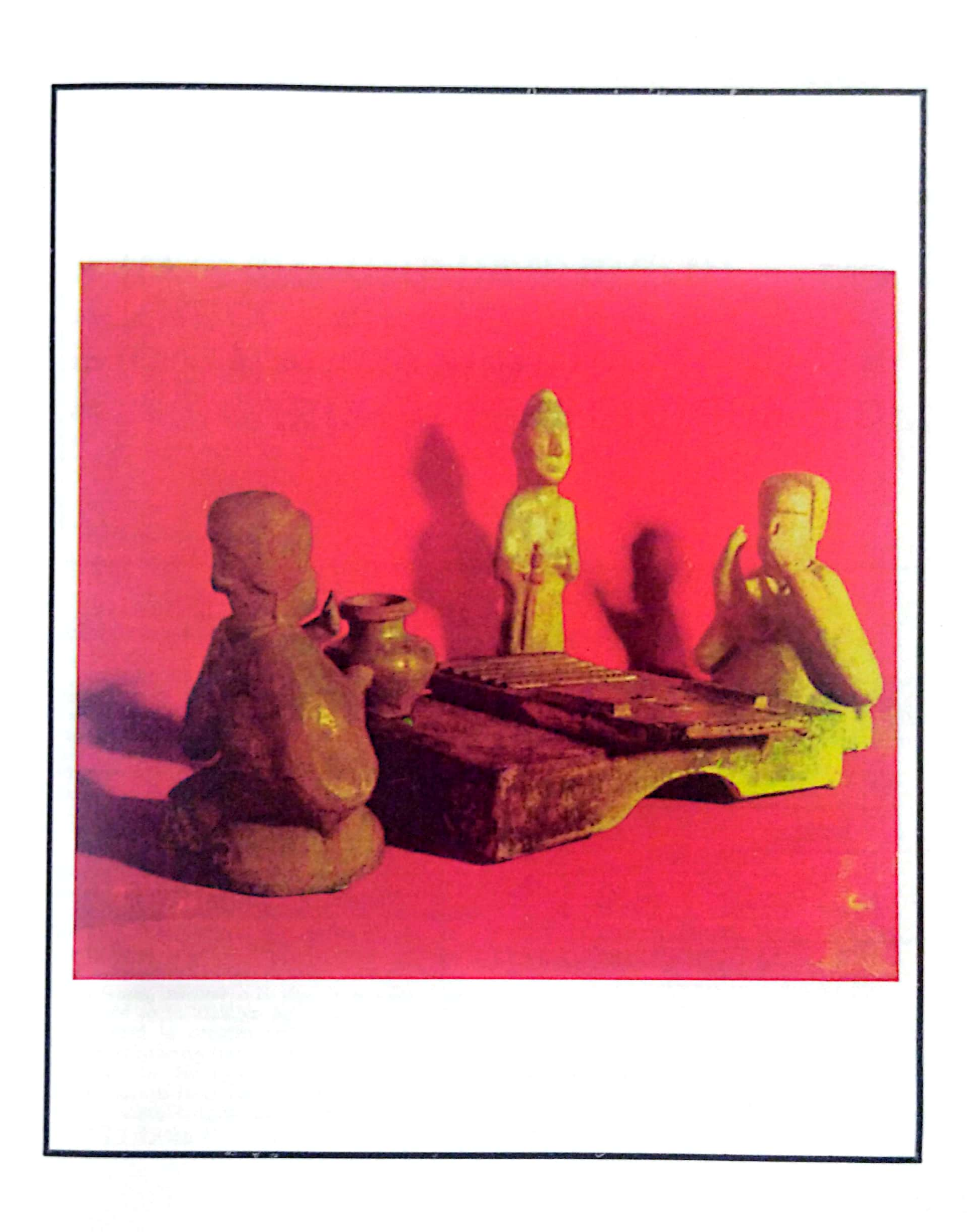
No confundir estos operadores con los operadores aritméticos de multiplicación y suma.

Operadores relacionales:

$>$	mayor que
$<$	menor que
=	igual
≠	desigual
≥	mayor que o igual a
≤	menor que o igual a
Σ	sumatoria (sigma)

Terminología

Operador: símbolo matemático que representa cierto proceso.
Operando: cantidad o símbolo sobre la cual opera el operador.
Cuadrado: producto de un número multiplicado por sí mismo.
Exponente: cifra que indica cuántas veces se repite un número como factor.
Sigma: sumatoria.



Juego de azar. Dinastía Han (206 a. J.C. - 220 d. J.C.).

$$
\begin{aligned}
&(A \oplus B) \odot (C \oplus D) \equiv \\
&\equiv [(A \oplus B) \odot C] \oplus [(A \oplus B) \odot D] \\
&\equiv [C \odot (A \oplus B)] \oplus [D \odot (A \oplus B)] \\
&\equiv (C \odot A) \oplus (C \odot B) \oplus (D \odot A) \oplus (D \odot B) \\
&\equiv (A \odot C) \oplus (A \odot D) \oplus (B \odot C) \oplus (B \odot D) .
\end{aligned}
$$

Símbolos matemáticos.

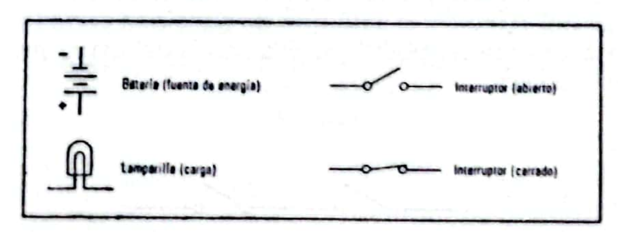
ALGEBRA DE BOOLE

Las leyes del álgebra de Boole difieren considerablemente de las leyes del álgebra elemental. Para evitar confusiones, conviene considerar el álgebra de Boole desde el punto de vista de los circuitos de conmutación.. En 1938, Claude Shanon utilizó por primera vez el álgebra de Boole en relación con problemas de circuitos de conmutación, desarrollando un método matemático para analizar, sintetizar y simplificar circuitos formados por interruptores y relés. Sus métodos fueron casi universalmente aceptados y aún hoy continúan en uso.

El que se inicia en el estudio del álgebra de Boole deberá empezar por aprender cierto número de términos y símbolos, como también los rudimentos de los circuitos básicos. Deberá, además, hacerse a la idea de que las variables que se utilizan en las ecuaciones booleanas tienen la peculiar característica de poder tomar solamente uno de dos posibles valores: cero y uno. No importa cuántas variables intervengan en la ecuación que describe un circuito lógico, cada variable solo puede tener el valor 0 o el valor 1.

CIRCUITOS BASICOS

Llámase *diagrama esquemático* a un dibujo de un circuito eléctrico. Para representar las diferentes partes del circuito se usan símbolos especiales. La siguiente figura muestra algunos de los símbolos más comunes.



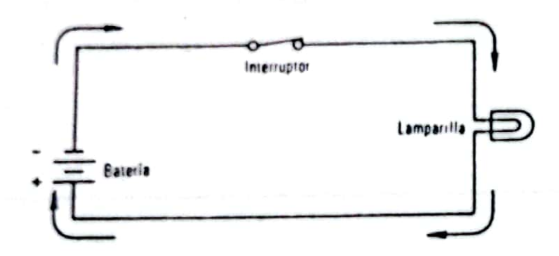
Símbolos circuitales.

La mayoría de los circuitos eléctricos constan de una *fuente* (fuente de energía), un *interruptor y una carga.* Llámase carga a cualquier componente que transforma la electricidad con un fin útil. En el ejemplo anterior, la lamparilla eléctrica es la carga, ya que cumple el fin útil de dar luz.

EJEMPLO

Un circuito completo debe tener un camino no interrumpido a través del cual fluya la corriente desde el polo negativo de la fuente a través de la carga, hasta regresar al polo positivo de la fuente. El interruptor se usa, principalmente, para interrumpir el circuito.

La corriente fluirá desde la fuente (batería) a través del interruptor cerrado, continuando a través de la carga (la lámpara) hasta regresar la fuente. Si el interruptor está abierto, la corriente no puede fluir. Podemos decir, por tanto, que la *salida* (corriente en la bombilla eléctrica) será un 1 si el interruptor está cerrado y un 0 si el interruptor está abierto.



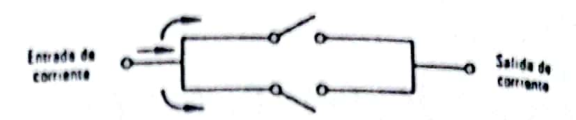
Circuitos en serie y en paralelo

Es posible que en un circuito se utilice más de un interruptor. Si se utilizan dos o más, pueden estar conectados uno a continuación del otro, caso en que se dice que están conectados en *serie*. Es obvio que ambos interruptores deben estar cerrados para que la corriente pueda fluir a través del circuito; si solo uno de ellos está cerrado, la corriente no podrá pasar a través del otro, que está abierto.

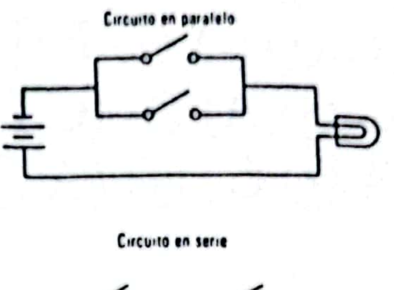


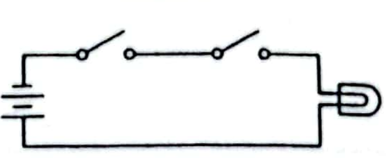
Interruptores en serie

Cuando los interruptores están conectados uno al lado del otro, se dice que están conectados en *paralelo*. Examinando este ejemplo se observa que si cualquiera de los interruptores está cerrado, la corriente podrá fluir desde la entrada hasta la salida. Estos dos conceptos tienen una enorme importancia en el estudio del álgebra de Boole.



Interruptores en paralelo





Convirtamos ahora nuestro conocimiento sobre circuitos en serie y en paralelo a valores 0 (cuando no hay flujo de corriente) y 1 (cuando sí lo hay).

¿Cuántas combinaciones posibles pueden presentarse para dos interruptores conectados en serie?

1. Ambos interruptores abiertos —salida 0 (no hay corriente).
2. El primer interruptor abierto y el segundo cerrado —salida 0 (no hay corriente).
3. El segundo interruptor abierto y el primero cerrado —salida 0 (no hay corriente).
4. Ambos interruptores cerrados —salida 1 (pasa corriente).

¿Qué posibilidades existen para dos interruptores conectados en paralelo?

1. Ambos interruptores abiertos —salida 0.
2. El primer interruptor abierto, el segundo cerrado —salida 1.
3. El segundo interruptor abierto, el primero cerrado —salida 1.
4. Ambos interruptores cerrados —salida 1.

Entonces, para un circuito en serie, el único caso en que la corriente *puede* fluir es cuando ambos interruptores están cerrados. Lo anterior

nos conduce a la siguiente *tabla de verdad* (para circuitos en serie), en la cual 0 se refiere a interruptores abiertos y 1 a cerrados.

Tabla de verdad para interruptores en serie

Interruptor 1	*Interruptor 2*	*Salida*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

En un circuito en paralelo, el único caso en que la corriente *no puede* fluir es cuando ambos interruptores están abiertos. Lo anterior nos conduce a la siguiente tabla de verdad (para circuitos en paralelo).

Tabla de verdad para interruptores en paralelo

Interruptor 1	*Interruptor 2*	*Salida*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

SIMBOLOS BOOLEANOS

Todos conocemos el símbolo algebraico normal (+) para indicar suma y el punto (•) para indicar multiplicación

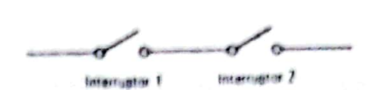
$A + B = C \quad A \cdot B = C$ o $AB = C$
$5 + 6 = 11 \quad 5 \times 4 = 20$

En el álgebra de Boole, estos símbolos adquieren significados totalmente diferentes. El símbolo ≪+≫ se define como equivalente al ≪O≫ de la lógica. Usando como ejemplo dos interruptores *A* y *B*, podemos decir que el uno, *O* el otro, *O* ambos, deben estar cerrados para que el circuito de paso a la corriente. Cuando ≪O≫ se usa en este sentido se denomina *O inclusiva.* En la terminología booleana se escribe: $A + B$ (*A O B*).

El símbolo ≪·≫ se define como equivalente a ≪Y≫. Este símbolo se refiere a dos o más variables unidas por la conjunción≪Y≫. Si no hay ningún símbolo presente se sobreentiende una ≪Y≫ (por ejemplo, $A \cdot B$ puede escribirse AB y continúa significando *A* Y *B*).

Para comprender mejor estos nuevos usos de símbolos ya conocidos, volvamos a los circuitos en busca de ejemplos.

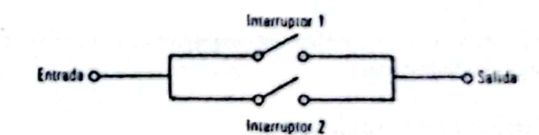
La operación Y puede representarse por medio de interruptores *en serie*.



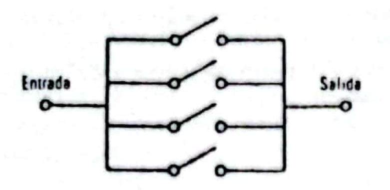
Si los interruptores están abiertos, la salida es ≪O≫. Si los interruptores están cerrados, la salida es ≪1≫. No importa cuantos interruptores en serie haya en el circuito; para que la corriente fluya, el interruptor 1 y el interruptor 2 deben estar cerrados. En cualquier otro caso, la salida será ≪O≫.

De lo anterior vemos que la salida de un componente Y en un circuito (llamado también una *compuerta*) vale 1 solo si todas las entradas valen 1. En esta situación se dice que la *compuerta* está *activada*. Si no está en esta situación (falta al menos un 1), se dice que la compuerta está *bloqueada*.

La operación ≪O≫ puede representarse por medio de interruptores en *paralelo*.



Si algún interruptor está cerrado, la salida valdrá 1. La combinación de dos interruptores en paralelo forma un componente O, porque cuando el interruptor 1 O el interruptor 2 o ambos están cerrados, la salida vale 1. La salida vale 0 solo si todos los interruptores están abiertos. El número de interruptores en paralelo (entradas) no importan para la validez de este resultado.



La salida será 0 sólo si todos los interruptores están abiertos. La salida será 1 en cualquier otra condición

EJEMPLO

Si A es cierto, $\overline{A}$ es falso

(Otra forma para la misma notación es A' —léase A prima). La representación simbólica de una negación en un circuito es el *inversor*, que convierte un 1 en 0 y un 0 en 1. Podemos decir, por ejemplo, que un inversor cambia un voltaje alto a un voltaje bajo y un voltaje bajo a un voltaje alto, suponiendo que representamos el estado 0 con un voltaje bajo y el estado 1 con un voltaje alto. La siguiente figura muestra la representación simbólica de un inversor.

0 → 1 Entrada 0 salida 1

1 → 0 Entrada 1 salida 0

Representación simbólica de un inversor.

El inversor efectúa la operación lógica de complementación.

Principio de dualidad

El material que hemos cubierto hasta este punto nos conduce a una teoría conocida como ≪principio de dualidad≫. En virtud de este principio, cualquier estado puede expresarse por medio de dos reglas diferentes, ya que una vez que un sistema ha quedado descrito por medio de una serie de relaciones, automáticamente existe un *sistema dual*. Dicho sistema dual es su complementario u opuesto. Este principio se conoce también como el *teorema de De Morgan*.

En el álgebra de Boole, este principio puede aplicarse para mostrar la relación entre los símbolos ≪+≫ y ≪ · ≫, ≪1≫ y ≪0≫ y ≪A≫ y ≪$\overline{A}$≫. Por tanto, todo teorema en álgebra booleana tiene su opuesto (o complemento).

Al examinar la negación o complementación con un poco más de detalle, encontramos que cuando se niega la totalidad de una expresión compuesta, por ejemplo, $\overline{A \cdot B}$ (o $\overline{AB}$) se está expresando NO (A Y B). Si por el contrario, se niega una sola variable, por ejemplo, $\overline{A} \cdot B$, se está expresando(NO A) Y B.

Si suponemos que A vale 1, entonces $\overline{A}$ = 0 (su complemento). Si suponemos que A vale 0, entonces $\overline{A}$ = 1. De lo anterior podemos establecer la tabla de verdad que se muestra:

Tabla de verdad para NO (complemento)

Tabla de verdad para NO
$\overline{0} = 1$
$\overline{1} = 0$

En este punto debemos introducir dos conceptos: (1) llamaremos *postulados* a aquellas proposiciones que se aceptan sin demostración y (2) *teoremas* a aquellas proposiciones cuya verdad puede demostrarse.

POSTULADOS

1. $A + 0 = A$ Se acepta sin demostración porque ya sea que A *valga 0* o valga 1, el postulado sigue siendo cierto.

$$0 + 0 = 0$$
$$1 + 0 = 1$$

2. $A \cdot 1 = A$ Como en el ejemplo anterior:

$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

(si $A = 0$; $B = 1$) (si $A = 1$; $B = 0$)

3. $A + B = B + A$ $0 + 1 = 1 + 0$ $1 + 0 = 0 + 1$
4. $B \cdot A = A \cdot B$ $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1$ $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0$
5. $A + \overline{A} = 1$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$
6. $\overline{A} \cdot A = 0$ $1 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 1 = 0$

Tablas de verdad

En la Tabla siguiente se repiten las tablas de verdad desarrolladas anteriormente, con el fin de poder comprobar más fácilmente con ellas los postulados y teoremas.

Tablas de verdad de Y y de O

Tabla de verdad Y (·)	*Tabla de verdad O (+)*
1. 0 Y 0 = 0	1. 0 O 0 = 0
2. 0 Y 1 = 0	2. 0 O 1 = 1
3. 1 Y 0 = 0	3. 1 O 0 = 1
4. 1 Y 1 = 1	4. 1 O 1 = 1

TEOREMAS BOOLEANOS

La Tabla nos muestra una serie de teoremas básicos del álgebra booleana, algunos de los cuales ya han sido discutidos.

Teoremas booleanos

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A + A = A$
4. $A + \bar{A} = 1$
5. $A \cdot 0 = 0$
6. $A \cdot 1 = A$
7. $A \cdot A = A$
8. $A \cdot \bar{A} = 0$
9. $(A')' = A$
10. $A + B = B + A$
11. $A \cdot B = B \cdot A$
12. $A + (B + C) = (A + B) + C$
13. $A(BC) = (AB)C$
14. $A(B + C) = AB + AC$
15. $A + AB = A$
16. $A(A + B) = A$
17. $(A + B)(A + C) = A + BC$
18. $A + \bar{A}B = A + B$

Explicación de los teoremas

El teorema 9 nos dice que una doble complementación da por resultado, nuevamente, la variable original. La variable A puede tomar únicamente los valores 0 o 1. Si $A = 0$, el primer complemento valdrá 1 y el segundo complemento valdrá 0, el mismo valor original. Igual cosa sucede si originalmente $A = 1$. Dos inversores en un circuito logran este fin, como se muestra en la figura.



Dos inversores producen doble complementación.

Cada uno de estos teoremas puede demostrarse en la misma forma. Examinemos algunos de ellos que poseen particular importancia.

Los teoremas 10 y 11 nos dicen simplemente que el orden en la suma o en la multiplicación no altera el resultado. Demostremos primero estas propiedades para el álgebra normal; luego las demostraremos para el álgebra booleana, utilizando tablas de verdad para la demostración.

EJEMPLOS

12	18	12	6
+ 18	+ 12	x 6	x 12
= 30	= 30	= 72	= 72

Estos dos teoremas se conocen como *leyes conmutativas.*

Los teoremas 12 y 13 se conocen como *leyes asociativas;* el teorema 12 nos dice que cuando hay que sumar tres o más cantidades, el resultado será el mismo, no importa cuáles dos cantidades se sumen primero entre sí.

EJEMPLOS

Sume 12, 16 y 42.

12	16	12
x 16	+ 42	+ 42
28	58	54
+ 42	+ 12	+16
= 70	= 70	= 70

El teorema 13 es semejante al teorema 12, pero aplicado ahora a la multiplicación; no importa cuál sea el orden de las multiplicaciones, el resultado será el mismo.

EJEMPLOS

Multiplique 3 x 4 x 6

3	4	3
x 4	x 6	x 6
12	24	18
x 6	x 3	x 4
= 72	= 72	= 72

El teorema 14 se conoce como la *ley distributiva* y nos dice que si dos números se suman y el resultado se multiplica por un tercer número [*A* (*B* + C)], el resultado será el mismo que si cada uno de los dos primeros se multiplica por el tercero y luego se suman los dos productos *(AB+ AC)*.

EJEMPLO

Fórmula: $A(B+C) = AB + AC$

Prueba algebraica:

5(4 + 3) = (5 x 4) + (5 x 3)

5 x 7 = 35 20 + 15 = 35

Extendamos la fórmula a tres sumandos y veamos que continúa siendo cierta:

5(4 + 3 + 2) = (5 x 4) + (5 x 3) + (5 x 2)

5 x 9 = 45 20 + 15 + 10 = 45

Las tres leyes anteriormente mencionadas pueden extenderse a cualquier número de términos. Recordemos bien los nombres: *ley conmutativa, ley asociativa y ley distributiva.* Estas tres leyes valen para el álgebra normal como quedó demostrado con los ejemplos anteriores, pero hay otros teoremas que valen solamente para el álgebra booleana y deben ser demostrados en forma diferente.

Examinemos, por ejemplo, el teorema 17:

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$

Si tratamos de probarlo para el álgebra normal fracasaremos:

(5 + 4) (5 + 3) = 5 + (4 x 3)

9 x 8 = 72 5 + 12 = 17

Para demostrar este teorema en el álgebra booleana, debemos en primer lugar, construir tablas de verdad para cada miembro de la fórmula:

Tabla de verdad para (A + B) (A + C)

	A B C	*(A + B)*	*(A + C)*	*(A + B) (A + C)*
(0)	0 0 0	0	0	0
(1)	0 0 1	0	1	0
(2)	0 1 0	1	0	0
(3)	0 1 0	1	1	1
(4)	1 0 0	1	1	1
(5)	1 0 1	1	1	1
(6)	1 1 0	1	1	1
(7)	1 1 1	1	1	1
			Usando la tabla original de O (+)	Usando la tabla original de Y (·)

Tabla para A + BC

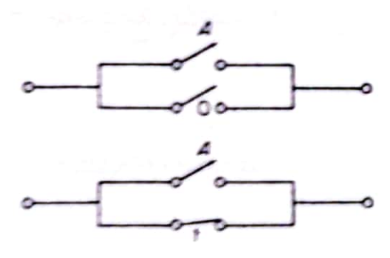
A	*B*	*C*	*BC*	*A + BC*
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Obsérvese que los resultados finales en ambas tablas son idénticos, con lo cual queda demostrado el teorema.

Relaciones entre teoremas y circuitos

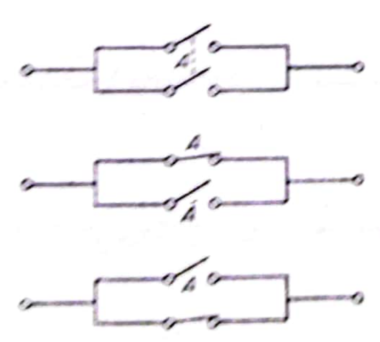
¿Cómo relacionar los teoremas booleanos con los circuitos de conmutación? Demos una mirada a algunos teoremas booleanos básicos y a los circuitos asociados con ellos. Recordemos que 0 representa siempre un interruptor abierto y que 1 representa un interruptor cerrado. *A* representa un interruptor cualquiera, que puede estar abierto o cerrado.

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$

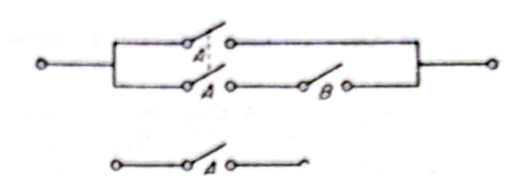


3. $A + A = A$
4. $A + \bar{A} = 1$

(Ambos interruptores funcionan a la vez)



Para el teorema 4, si *A* está cerrado, $\bar{A}$ estará abierto y si *A* está abierto $\bar{A}$ estará cerrado.



5. $A + AB = A$

Demostración. $A + A \cdot B$
$= A(1 + B)$
$= A$

Puesto que los dos interruptores *A* actúan a la vez, sobra el segundo interruptor *A* como también el *B*. El primer interruptor *A*, por sí solo cumplirá la misma función, puesto que aún si el interruptor *B* está abierto, la corriente podrá pasar por el primer *A*, si éste está cerrado.

Demostración del teorema 5 por medio de una tabla de verdad:

A	*B*	*AB*	*A* + (*AB*)	*A*
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

De nuevo estamos utilizando las tablas de Y de O.

Los siguientes son algunos ejemplos del uso de circuitos simbólicos para representar términos booleanos:

1. El término *A* (*B* + *C*) puede representarse por el siguiente circuito simbólico.

El resultado de B · C (Compuerta O) va a A·(B + C) (Compuerta Y)

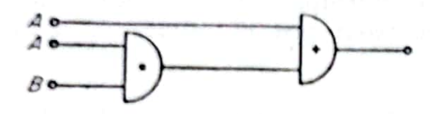


2. El término AB + C puede representarse como sigue:

$A \cdot B$ (compuerta Y) $A \cdot C$ (compuerta Y) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$ (compuerta 0)

3. El término A + AB puede representarse como sigue:

A + va directamente a la compuerta 0
$A \cdot B$ (compuerta Y) va también a la compuerta 0



Complemento de una expresión booleana

Para hallar el complemento de una expresión booleana es suficiente seguir la siguiente regla: Cámbiense todos los signos + por · , todos los signos · por + y remplácese cada letra que aparezca en la expresión por su complemento.

EJEMPLO

$A(A + B) = A$ expresión básica

complemento: $\overline{A} + (\overline{A} \cdot B) = \overline{A}$

Construyamos ahora tablas de verdad para demostrar ambos teoremas:

Tabla de verdad de A (A + B) = A

A	B	$(A + B)$	$A(A + B)$		A
0	0	0	0	=	0
0	1	1	0		0
1	0	1	1		1
1	1	1	1		1

(usando la tabla de +) (usando la tabla de ·)

Tabla de verdad de $\overline{A} + (\overline{A} \cdot \overline{B}) = \overline{A}$

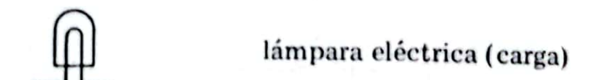
$\overline{A}$	$\overline{B}$	$(\overline{A \cdot B})$	$\overline{A} + (\overline{A \cdot B})$		$\overline{A}$
1	1	1	1		1
1	0	1	1	=	1
0	1	1	0		0
0	0	0	0		0

(usando la tabla de ·) (usando la tabla de +)

RESUMEN

SIMBOLOGIA

batería (fuente de energía)



lámpara eléctrica (carga)

interruptores (abierto-cerrado)



· Y booleano
\+ O booleano

compuerta Y simbólica

compuerta O simbólica

inversor

$\bar{A}$

barra sobre un símbolo, significa lo contrario del estado existente (equivale a NO o complemento)

Tabla de verdad de NO

$\bar{0} = 1$
$\bar{1} = 0$

Tabla de verdad de Y

$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

Tabla de verdad de O

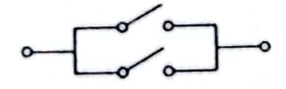
$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 1$

Terminología

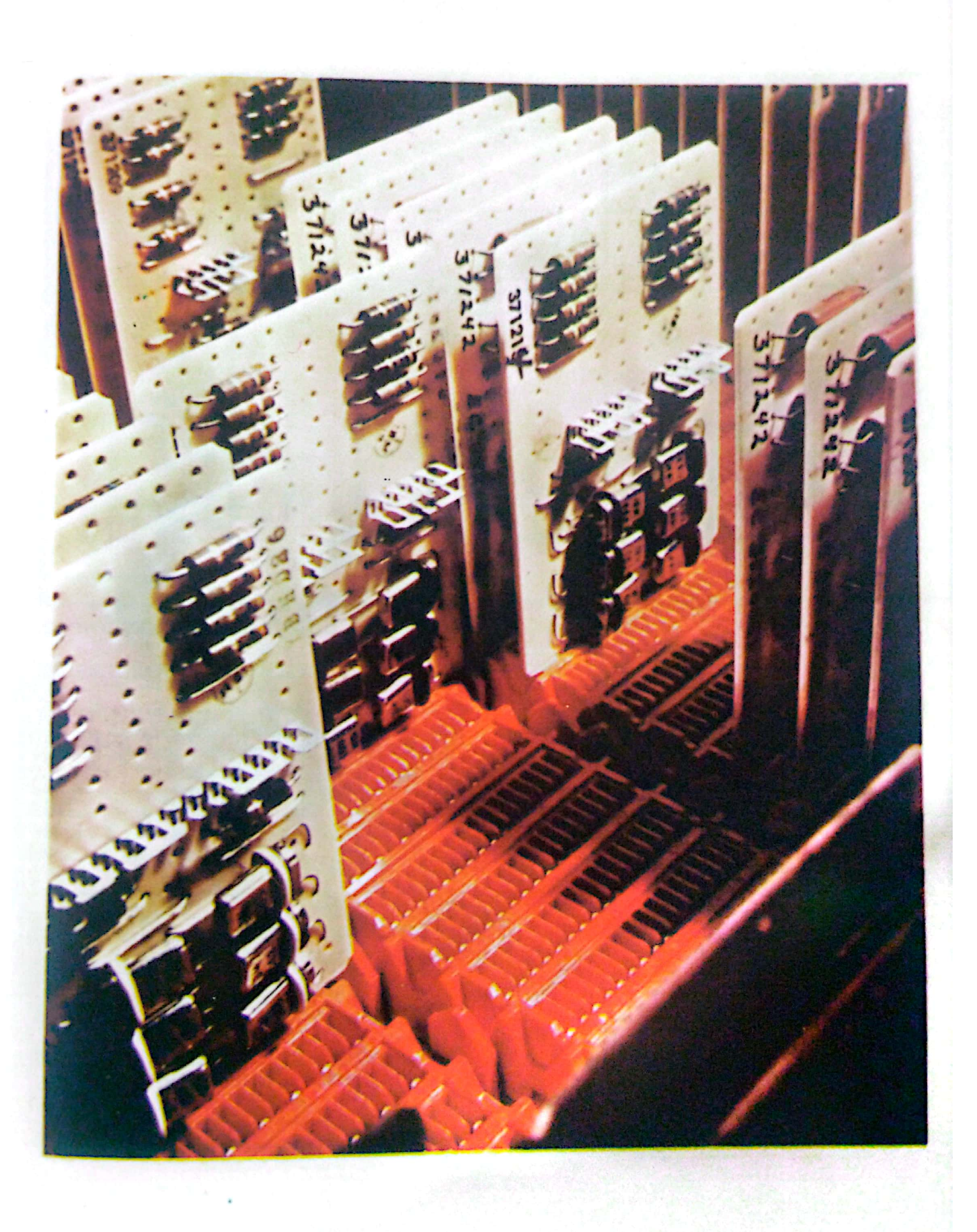
Diagrama esquemático
  Dibujo de un circuito o una parte de un circuito.
Fuente
  Fuente de energía en un circuito.
Carga
  Componente de un circuito que utiliza energía.
Serie
  Interruptores conectados uno a continuación del otro.

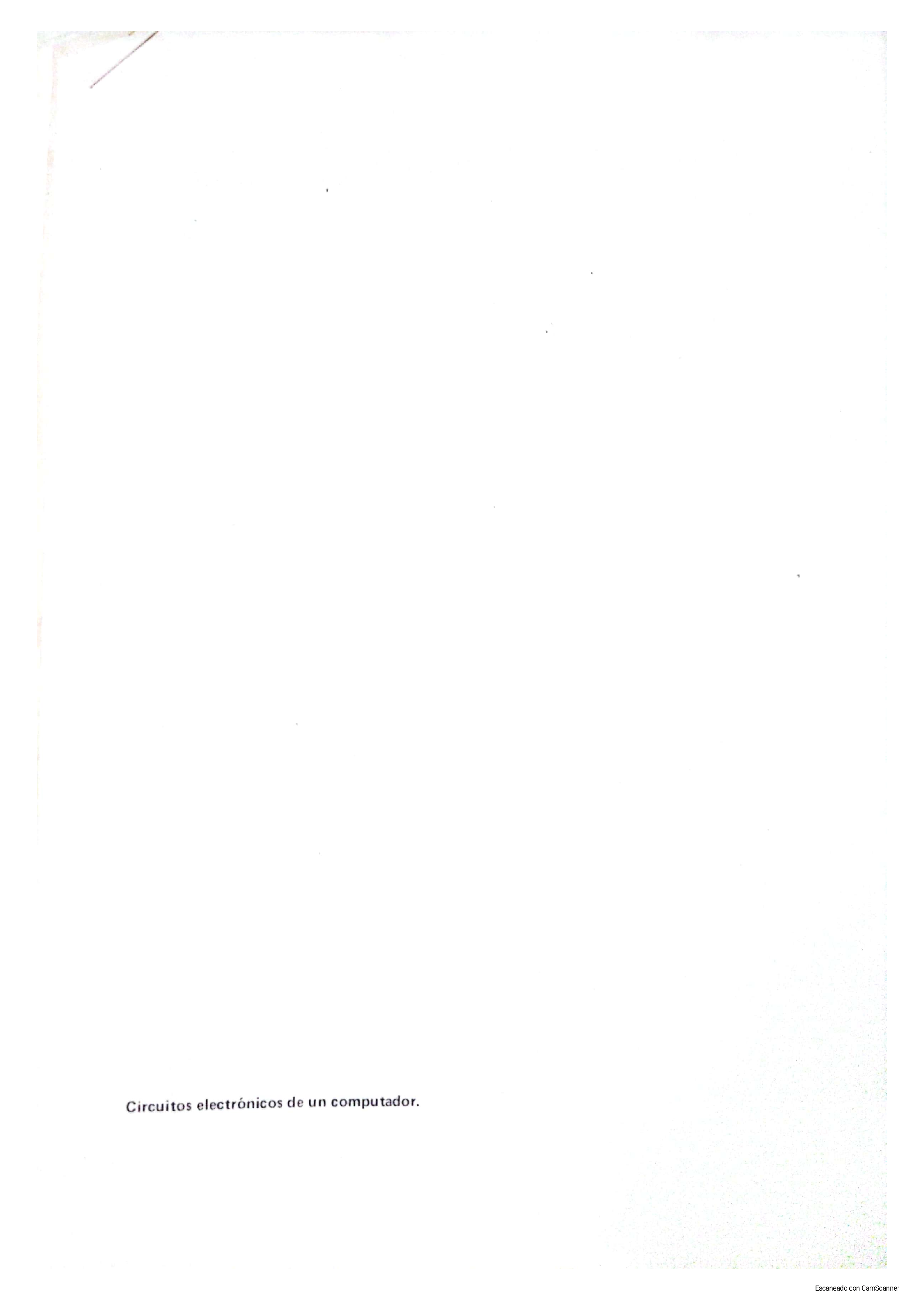


Paralelo
  Interruptores conectados uno al lado del otro.



Y
  Expresión booleana para el concepto de interruptores en serie.
O
  Expresión booleana para el concepto de interruptores en paralelo.
Compuerta
  Componente de un circuito que da lugar a una salida.
Activada o habilitada
  Aplícase a la compuerta que puede conducir corriente.
Bloqueada o inhabilitada
  Aplícase a la compuerta que no puede conducir corriente.
Inversor
  Componente de un circuito con la propiedad de convertir los 1 en 0 y los 0 en 1.
Postulado
  Proposición que se acepta sin demostración.
Teorema
  Regla cuya verdad puede demostrarse.
Leyes conmutativas
  El orden en la suma o la multiplicación no afecta el resultado.
Leyes asociativas
  Cuando tres o más cantidades se suman o multiplican, el orden de las sumas o multiplicaciones no altera el resultado.
Ley distributiva
  Si dos (o más) números se suman y el resultado se multiplica por un tercer número, el resultado es el mismo que si cada uno de los primeros números se multiplica por el tercero y luego se suman los productos.
Tablas de verdad
  Método utilizado para demostrar teoremas booleanos.


371242
371242
371242



Circuitos electrónicos de un computador.

	I	A	B	C	D
I	I	A	B	C	D
A	A	I	C	B	E
B	B	D	I	E	A
C	C	E	A	D	I
D	D	B	E	I	C

TABLA DE GRUPO

INTRODUCCION A LA LOGICA

FORMAS LOGICAS BASICAS

La lógica simbólica se asemeja bastante al álgebra booleana, principalmente debido a que ésta es más bien una rama de la lógica que de la matemática. La lógica simbólica es una teoría y una metodología para la deducción y el razonamiento formal. Consiste, en su forma más simple, en una o más premisas, de las cuales se sigue una conclusión lógica.

Proposiciones condicionales

Una proposición condiconal es aquella que presenta una o más condiciones para elegir una de ellas.

EJEMPLO

Premisas: 1. *Si* hay manzanas en el árbol, *entonces* Juanito se enfermará por comer demasiadas manzanas.
2. No hay manzanas en el árbol.

Conclusión: Juanito no se enfermará por comer demasiadas manzanas.

Una proposición como ésta, de la forma *si. . . entonces* se denomina *condicional* y puede convertirse fácilmente a símbolos literales:

Premisas: si *p* entonces *q*
no *p*

Conclusión: no *q*

(*p* es ≪ hay manzanas en él árbol ≫)
(*q* es ≪ Juanito se enfermará. . . ≫)
(no *p* es ≪ no hay manzanas.... ≫)
(no *q* es ≪ Juanito no se enfermará . . . ≫)

La proposición condicional puede tomar otra forma:

Premisas:	si p entonces q
	p
Conclusión:	q

Usando el mismo ejemplo anterior tenemos ahora:

Premisas: 1. Si hay manzanas en el árbol *entonces* Juanito se enfermará por comer demasiadas manzanas.

2. Hay manzanas en el árbol.

Conclusión: Juanito se enfermará por comer demasiadas manzanas. Una tercera forma de proposición condicional es la siguiente:

Premisas:	si p entonces q
	si q entonces r
Conclusión.	si p entonces r

Este tipo es una combinación de tres proposiciones (p, q y r), dos de las cuales aparecen en la conclusión.

EJEMPLO

Premisas: 1 *Si* Juan roba manzanas *entonces* Pedro se lo dirá a su madre.

2. *Si* Pedro se lo dice a su madre *entonces* Juan será castigado.

Conclusión: Si Juan roba manzanas, entonces será castigado.

Proposiciones con O

Hay muchas maneras de construir proposiciones *si . . .* entonces; consideremos ahora una donde se utiliza la conjunción O.

EJEMPLO

Premisas 1. Pablo nació en Lima o nació en Bogotá.

2. Pablo nació en Bogotá.

Conclusión: Pablo no nació en Lima

Lo anterior puede escribirse simbólicamente:

Premisas	1. p o q
	2. q
Conclusión:	no p

Por supuesto, también puede invertirse:

Premisas:	1. p o q
	2. p
Conclusión:	no q

Este tipo de proposición se denomina *O exclusiva* porque una u otra de las proposiciones iniciales debe ser cierta, pero ambas *no pueden* ser ciertas simultáneamente. Existe también la proposición *O inclusiva*, en la cual una u otra proposición o ambas pueden ser ciertas (recuérdese la O inclusiva del álgebra booleana). . . . .

En este libro la O se usará siempre en el sentido inclusivo mientras no se especifique lo contrario.

EJEMPLO

Premisas: 1. Ramírez tiene un Ford *o* tiene un Pontiac.

2. Ramírez no tiene un Ford.

El hecho de que Ramírez tenga (o no tenga) un Ford no elimina la posibilidad de que también tenga un Pontiac. En el ejemplo anterior Pablo solamente podía haber nacido en una ciudad; no hay posibilidad de que ambas proposiciones fueran ciertas. Esta es la diferencia entre la O exclusiva y la O inclusiva.

Conclusión: Ramírez tiene un Pontiac.

Simbólicamente, podemos escribir:

Premisas;	p o q
	no p
Conclusión:	q

Que de nuevo puede invertirse:

Premisas:	p o q
	no q
Conclusión:	p

Proposiciones con Y

Otro tipo de proposición utiliza la conjunción Y, según se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Premisas: Juan y Pedro fueron al partido.
Conclusión: Juan fue al partido.
Premisas: 1. Juan fue al partido.
2. Pedro fue al partido.

Conclusión: Juan y Pedro fueron al partido
La proposición con Y puede tomar las siguientes formas:

Premisa:	p y q	p y q	1. p
			2. q
Conclusión:	p	q	Conclusión: p y q

La Tabla siguiente muestra una serie de formas posibles. Cada una de ellas es bastante simple, pero es posible resolver problemas relativamente complejos mediante aplicaciones sucesivas de estas formas.

Algunas formas lógicas simples

(a) si p entonces q
si q entonces r
—————
si p entonces r

(b) si p entonces q
p
—————
q

(c) si p entonces q
no p
—————
no q

(d) p o q
no p
—————
q

(e) p o q
no q
—————
p

(f) no (p y q)
—————
no p o no q

(g) no (p o q)
—————
no p y no q

(h) p y q
—————
p

(i) p y q
—————
q

(j) p
q
—————
p y q

Nota: La conclusión en cada caso es la que aparece debajo de la línea.

TABLAS DE VERDAD

Las tablas de verdad se utilizan en lógica simbólica para establecer la validez de las proposiciones. En todas las formas mencionadas en la sección anterior, la cuestión de interés era ≪¿es o no verdadera esta proposición?≫. La construcción de tablas de verdad simplifica la tarea de determinar la verdad o falsedad de una proposición.

Suponiendo que cualquier proposición dada puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas, tenemos que para dos proposiciones puede presentarse uno de cuatro posibles casos: (1) ambas proposiciones son verdaderas, (2) la primera es verdadera y la segunda falsa, (3) la segunda es verdadera y la primera falsa, (4) ambas proposiciones son falsas. Dicho en otras palabras, hay cuatro maneras de combinar dos proposiciones, tomadas de dos en dos. La Tabla siguiente nos muestra lo anterior simbólicamente.

Combinaciones posibles de dos proposiciones

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Utilizando las dos columnas básicas de la Tabla podemos añadir una columna adicional con encabezamiento $p \cdot q$ para obtener la tabla de verdad de la condición Y. Tal como se muestra en la tabla siguiente.

Tabla de verdad de Y

p	$\cdot$	q		$p \cdot q$
V		V	=	V
V		F	=	F
F		V	=	F
F		F	=	F

La tabla de verdad del O inclusivo se muestra a continuación.

Tabla de verdad del O inclusivo

p		q		$p + q$
V	+	V	=	V
V	+	F	=	V
F	+	V	=	V
F	+	F	=	F

Mediante inspección de las tablas apreciamos inmediatamente que en el Y ambas proposiciones deben ser verdaderas para que el conjunto lo sea, mientras que en el O el conjunto solo es falso si ambas proposiciones son falsas.

La tabla de verdad para la condición *si. . . entonces* se muestra seguidamente. La proposición condicional se considera falsa solo si el *antecedente* (primera premisa) es verdadero y el *consecuente* (segunda premisa) es falso. En cualquier otro caso, la proposición condicional se considera verdadera.

Tabla de verdad de si. . . entonces

p	q	*si p entonces q*
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La condición si. . . entonces se puede indicar mediante el símbolo ⊃ (esto es $p \supset q$ significa si p entonces q).

Volvamos ahora, conociendo ya esta tabla de verdad, a las formas lógicas básicas. Consideremos, por ejemplo, la forma:

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Esto mismo podría escribirse en forma de tabla de verdad como se indica a continuación:

(Premisa 1) $p \supset q$	(Premisa 2) p	(Conclusión) q
V	V	V
F	V	F
V	F	V
V	F	F

($p \supset q$) Premisa 1: Si Pedro adquire una motocicleta entonces la usará en la ciudad.

Premisa 2: Pedro adquiere una motocicleta.

Conclusión: La usará en la ciudad.

Esta es la parte *(VVV)* de la tabla de verdad. Las otras partes pueden verificarse en la misma forma.

(FVF) La Premisa 1 es falsa; por tanto, aunque Pedro adquiera la motocicleta (Premisa 2: *V*) no la usará en la ciudad (conclusión: *F*).

(V F V) La Premisa 1 es verdadera, la Premisa 2 falsa, pero no podemos descartar la posibilidad (basados en la Premisa 1) de que Pedro use una motocicleta en la ciudad.

(V F F) La Premisa 1 es verdadera, pero Pedro no adquiere la motocicleta (Premisa 2: *F*) y, por tanto, no la usará en la ciudad (conclusión: *F*).

La terminología ≪lógica≫ apropiada para las formas que hemos estudiado hasta ahora es la siguiente:

Conjunción	(Y)
Disjunción	(O)
Negación	(NO)
Implicación	(SI. . . ENTONCES)

Los resultados de las tres tablas de verdad pueden combinarse en una tabla única como se muestra

Tabla de verdad para · , +, ⊃

p	q	$p \cdot q$	$p + q$	$p \supset q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

La forma bicondicional

Llámase *bicondicional* a una proposición (que consta de dos factores) que es verdadera si ambos factores son verdaderos, también verdadera si ambos factores son falsos, y falsa en los otros casos. Corresponde a lo que en el lenguaje hablado se expresa con ≪si y solo si≫.

EJEMPLO

El cazador disparará si y solo si el león lo ataca.
La condición ≪si y solo si≫ implica equivalencia. En lugar de decir p si y solo si q, podríamos decir: p implica q Y además q implica p. Para expresar implicación se utiliza el símbolo →; si $p \rightarrow q$ Y $q \rightarrow p$ se dice que p es equivalente a q y se escribe $p \equiv q$. El símbolo ≡ se utiliza para expresar este tipo de dependencia. Si en el ejemplo anterior A representa ≪el cazador dispara≫ y B ≪el león ataca≫ podemos escribir $A \equiv B$ es decir, que A es verdadero si y solo si B ocurre.

La tabla de verdad para esta forma se muestra a continuación:

Tabla de verdad del bicondicional

Tabla de verdad de $p \equiv q$				
V	≡	V	=	V
V	≡	F	=	F
F	≡	V	=	F
F	≡	F	=	V

La única otra forma de llegar a una conclusión de ≪verdadero≫ es negando el ejemplo anterior. El cazador *no* disparará si y solo si el león *no* ataca. La tabla de verdad para la condición NO se muestra en la Tabla. Obviamente, resulta ser exactamente la opuesta de la tabla de verdad de $p \equiv q$.

Tabla de verdad de la negación bicondicional

Tabla de verdad de $(p \equiv q)$				
V	≡	V	=	F
V	≡	F	=	V
F	≡	V	=	V
F	≡	F	=	F

Las condiciones de verdadero en la tabla del $(p \equiv q)$ pueden interpretarse como la condición del O exclusivo; solo se llega a la conclusión ≪verdadero≫ cuando uno de los factores es verdadero y el otro es falso.

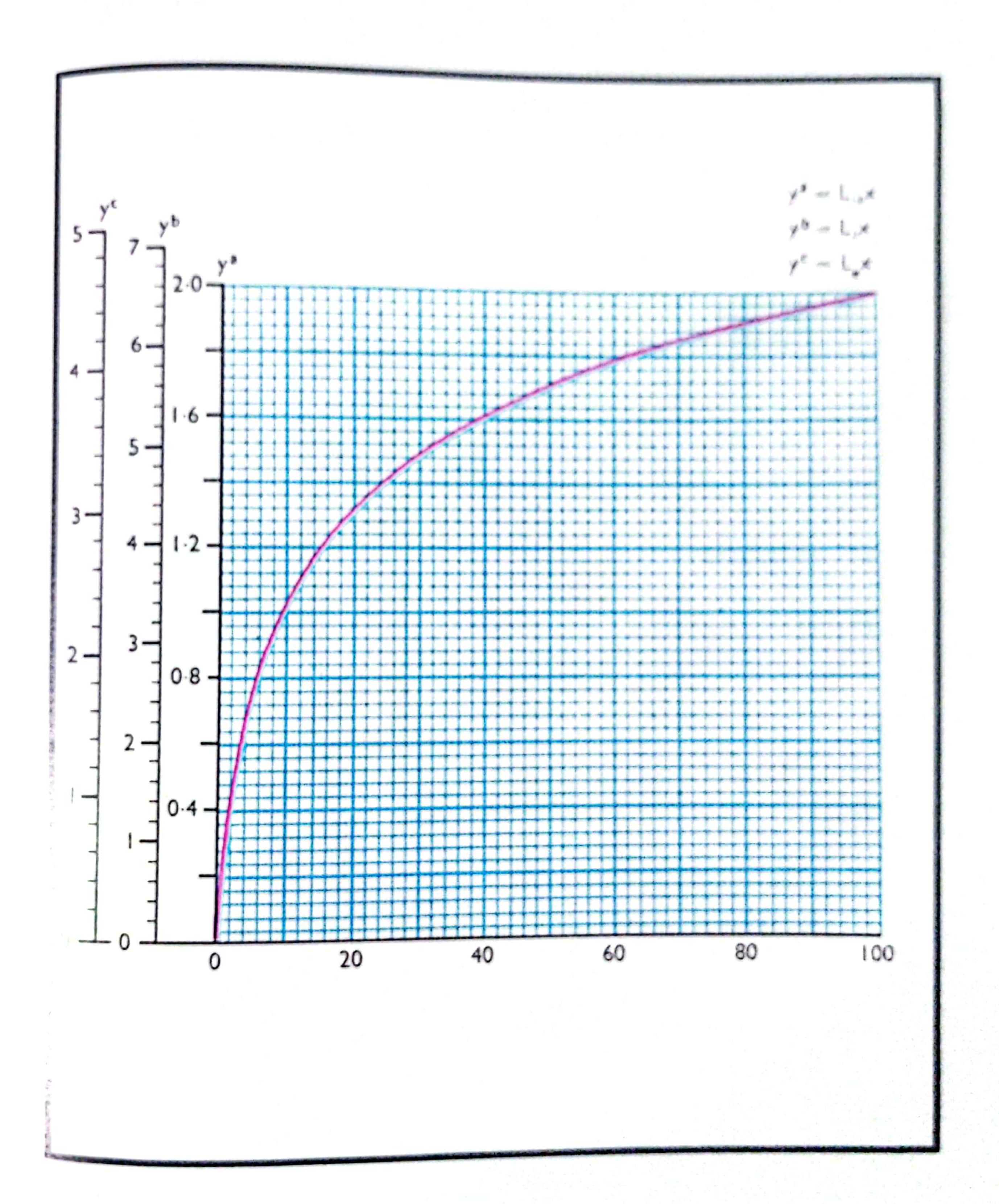
EJEMPLO

$(A \equiv B)$ (V) A — el cazador disparará
(V) B — el león atacará
(F) A — el cazador no disparará
(F) B — el león no atacará

Escribiendo explícitamente cada proposición y refiriéndose a la anterior tabla de verdad, es fácil verificar la corrección de dicha tabla como sigue:

1. No es cierto que el cazador disparará si el león ataca. Falso (porque sabemos que en estas condiciones el cazador si disparará).
2. No es cierto que el cazador disparará si el león no ataca. Verdadero.
3. No es cierto que el cazador no disparará si el león ataca. Verdadero.
4. No es cierto que el cazador no disparará si el león no ataca. Falso.

Cuando las proposiciones son simples, como las que hemos presentado en páginas anteriores, es fácil explicar con palabras su verdad o falsedad, pero cuando se trate de formas más complejas las tablas de verdad se convierten en algo esencial.



$y^a = L_{10}x$
$y^b = L_2x$
$y^c = L_ex$
y^c
5
4
3
2
1
0
y^b
7
6
5
4
3
2
1
y^a
2·0
1·6
1·2
0·8
0·4
0
20
40
60
80
100

Gráfico de una función.

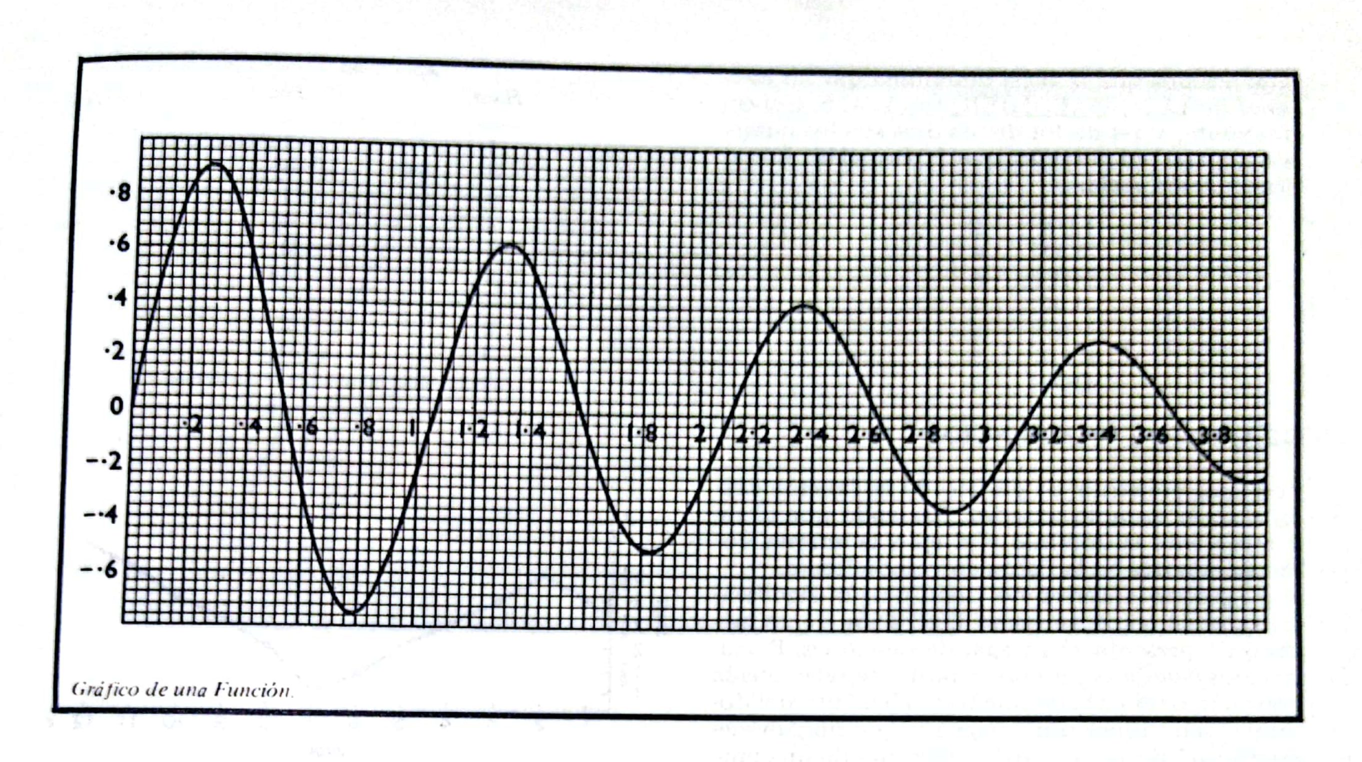


Gráfico de una Función.

FUNCIONES Y ECUACIONES

TERMINOLOGIA

El estudio de las funciones es básico para el estudio de la matemática y contribuye a desarrollar habilidad algebraica en el estudiante. El tema interesa aún a los estudiantes sin orientación matemática, ya que una buena base en el tema es útil para el estudio de casi cualquier ciencia.

Defínese *función* como la relación que existe entre dos conjuntos, en la cual a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento, y sólo uno, del segundo conjunto, que se llama imagen de aquel elemento.

EJEMPLO

$$A = \{a, b, c\}$$
$$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$

El conjunto A se denomina *dominio* de la función. Los elementos del conjunto B forman lo que se llama la *imagen* de la función, que es el conjunto de las imágenes de los elementos de A.

Con frecuencia, tanto el dominio como la imagen de una función son conjuntos de números, pero esto no es esencial a la definición. Una función puede referirse a personas, objetos, programas de producción, notas escolares, informes contables; etc.

También puede describirse una función como la *aplicación* de los elementos de su dominio sobre los elementos de su imagen. En el ejemplo anterior, sería apropiado decir que a se representa como 1, b se representa como 2 y c se representa como 3. Otra forma de expresar lo mismo consiste en decir que la *imagen* de a es 1, la *imagen* de b es 2 y la *imagen* de c es 3.

Para que una función quede definida, deben conocerse dos cosas: (1) el dominio de la función y (2) la regla que permite obtener la imagen de cada uno de los elementos del dominio.

EJEMPLO

A = {LUN, MAR, MIER, JUE, VIE, SAB, DOM}

B = {1 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Supongamos que la regla determina que las imágenes de LUN, MAR, MIER, son 2, 4, 6, respectivamente, y las de los demás días son los números impares empezando con 1 para JUE. La representación sería:

LUN	2
MAR	4
MIER	6
JUE	1
VIE	3
SAB	5
DOM	7

GRAFICO DE UNA FUNCION

Podemos construir un gráfico de la función descrita en el ejemplo anterior, haciendo que el eje x represente el dominio y el eje y la imagen, como se muestra en la figura correspondiente.

El gráfico anterior no tiene ningún significado especial, excepto como ilustración de un método de presentación visual de funciones. Recalquemos que la regla más importante relacionada con funciones es la de que todo elemento del dominio debe tener una imagen y que ningún elemento del dominio puede tener más de una imagen.

En el gráfico anterior la imagen se ha representado como un conjunto de puntos sobre el eje y y el dominio como un conjunto de puntos sobre el eje x.

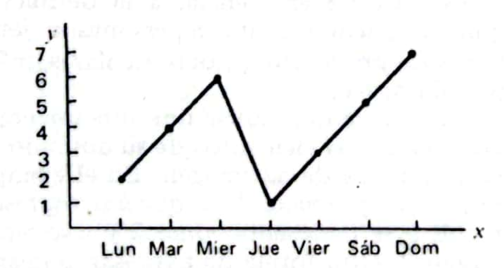


Gráfico lineal de una función.

EJEMPLO

El dominio es un período de 12 horas y cada hora dentro de este período es un elemento. La imagen es el conjunto de las alturas de la marea (medidas en pies).

Aplicación

Hora	*Pies*
1	3
2	$3\frac{1}{2}$
3	3
4	$2\frac{1}{2}$
5	2
6	$1\frac{1}{2}$
7	1
8	2
9	$2\frac{1}{2}$
10	3
11	$3\frac{1}{2}$
12	4

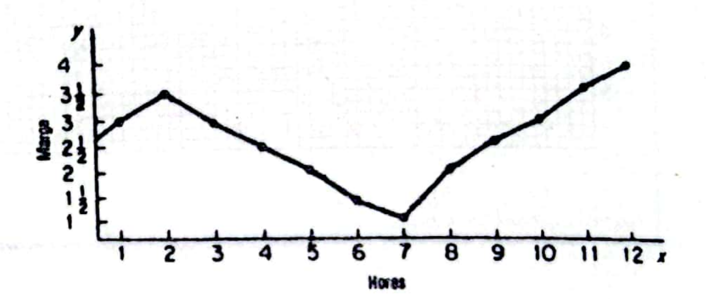


Gráfico de una función continua.

La figura anterior muestra el gráfico correspondiente a este ejemplo. El gráfico anterior al ejemplo representa una función *discontinua*, ya que consta de puntos dados aislados, por el contrario, el gráfico del ejemplo representa una función *continua*, ya que bien podrían tomarse más medidas en horas intermedias sobre el eje del tiempo, obteniendo así una línea continua.

EJEMPLO

$x = [-3, -1, 1, 3, 4]$ (éste es el dominio).

La regla será que a cada elemento x le corresponderá su doble, $2x$. La función puede escribirse $f(x) = 2x$ (dos veces x).

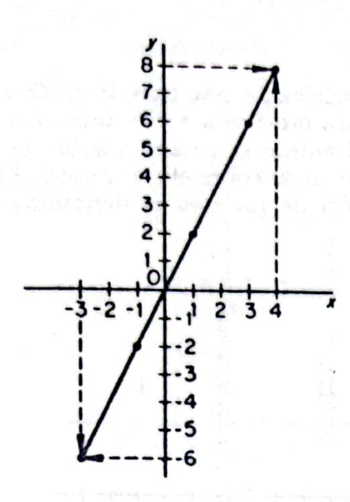


Gráfico de una función algebraica.

Aplicación

x	$f(x)$
−3	−6
−1	−2
1	2
3	6
4	8

La intersección de los ejes x e y se denomina *origen.* Sobre el eje x se marcan entonces intervalos iguales; a la izquierda del origen los valores negativos y a la derecha positivos; sobre el eje y se procede en forma semejante. Ahora es fácil dibujar el gráfico conociendo la tabla de la aplicación.

Una función también puede representarse por medio de un gráfico de barras, lo cual es especialmente conveniente para funciones discontinuas. El dominio y la imagen se representan como antes, pero en lugar de colocar simplemente los puntos sobre el gráfico y unirlos con trazos rectos, se dibujan barras sobre la línea del eje x cuyas alturas representan valores en la imagen.

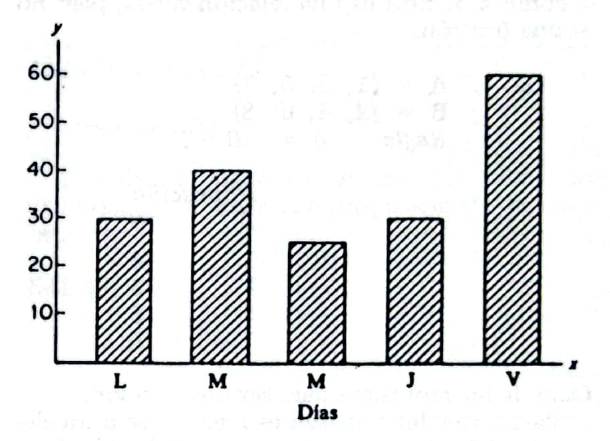
EJEMPLO

$$x = \{L, M, Mc, J, V\}$$

La imagen es el tiempo gastado para llegar al trabajo.

Aplicación

x	$f(x)$
L	30 min
M	40 min
Mc	25 min
J	30 min
V	1 hora



Reglas para funciones

Una función queda determinada por una regla que asigna a cada elemento del primer conjunto (dominio) un elemento y *solo uno* del segundo conjunto (imagen). Es permisible que un elemento del segundo conjunto corresponda a más de un elemento del primero, pero no a la inversa.

EJEMPLOS

1. $A = \{1, 2, 3\}$
   $B = \{4, 5, 6, 7\}$

Aplicación

A	B
1	4
2	4
3	5

Lo anterior es una función, porque se cumple la regla.

2. Los mismos conjuntos anteriores.

Aplicación

A	*B*
1	4 no cumple con
1	5 la regla
2	6
3	7

La anterior no es una función puesto que viola la regla, ya que el elemento 1 está asignado tanto a 4 como a 5. Esta es una relación válida, pero no es una función.

3. A = {1, 3, 5, 7}
B = {2, 4, 6, 8}
Regla $A = B + 2$

Aplicación

A	*B*
1	4
3	6
5	8
7	10

Cumple los requisitos para ser una función.

Para entender por qué es lógico que a un elemento del primer conjunto no pueda asignársele más de un elemento del segundo, considérese el siguiente ejemplo:

El conjunto *A* está formado por los estudiantes del curso de historia.

El conjunto *B* está formado por las calificaciones obtenidas en cierto examen.

La representación podría ser (parcialmente):

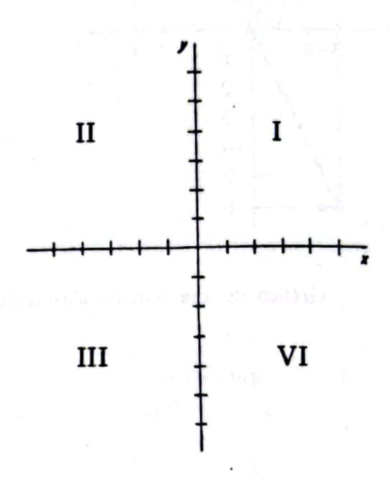
A	*B*
Juan	90
Pedro	82
Marta	88
María	79
Jorge	86

No tendría ningún sentido asignar a Juan (un elemento de *A*) dos calificaciones diferentes en el mismo examen:

Juan 90
Juan 72

COORDENADAS CARTESIANAS

La forma básica de este tipo de gráfico se ilustra en la figura mostrada a continuación. Obsérvese que el dominio se presenta sobre el eje horizontal y la imagen sobre el eje vertical. El punto de intersección de los ejes se denomina origen.



Sistema de coordenadas cartesianas.

Cuando el dominio no se limita a unos pocos elementos, sino que se expresa por medio de una ecuación algebraica que incluye en el dominio todos los números reales, pueden representarse tanto los números positivos como los negativos, prolongando los ejes hasta donde se desee.

Los ejes se cortan formando cuatro ángulos rectos, denominados *cuadrantes*, que aparecen numerados con cifras romanas en la figura anterior.

Cualquier punto del gráfico queda localizado por medio de sus coordenadas (x, y) y puede identificarse con el cuadrante en que está localizado.

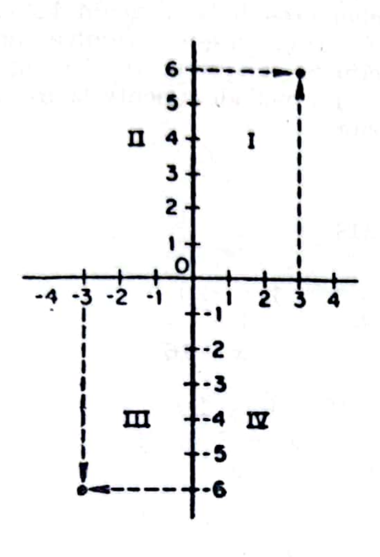
EJEMPLO

$$x = 2y$$

Un punto de este gráfico podría ser $x = 3$, $y = 6$; otro punto podría ser $x = -3$, $y = -6$.

Las coordenadas de estos puntos se escribirían (3, 6) y (−3, −6), donde el primer número re-

presenta el dominio y el segundo la imagen. El punto (3, 6) está localizado en el cuadrante I y (−3, −6) en el cuadrante III.



Vale la pena anotar que el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas fue desarrollado por Descartes, soldado, matemático y filósofo francés, inventor (a más de otras cosas) de la geometría analítica. La palabra ≪cartesiano≫ se deriva de *Castesius*, forma latina del nombre de Descartes.

Siempre que una función se exprese por medio de una ecuación, automáticamente se entiende que el dominio está constituido por todos los números reales, salvo que se especifique lo contrario. La imagen queda especificada por la ecuación misma.

FORMAS DE ECUACIONES

En las discusiones de las páginas anteriores hemos utilizado algunas ecuaciones sencillas; sin embargo, para utilizar las funciones y ecuaciones en forma más efectiva, necesitamos examinar con más detalle la estructura básica y las reglas que gobiernan las ecuaciones.

Equivalencia

Llámase *sentencia* a una proposición expresada con símbolos en lugar de palabras, y con frecuencia es necesario determinar si una proposición de este tipo es verdadera o falsa. Cuando se utiliza un signo igual, se presume que el primer miembro y el segundo miembro representan exactamente el mismo valor, o, en otras palabras, que los dos miembros son *equivalentes*.

EJEMPLOS

$5 + 9 = 14$

$\frac{8}{4} = 2$

$a = b \quad 2$ (si a es cualquier número 2 unidades menor que b)

Desigualdades

También el signo de desigualdad (≠) puede utilizarse para expresar proposiciones verdaderas.

EJEMPLOS

$3 \neq 5$
$3 + 6 - 2 \neq 10$

Estas sentencias especifican que el primer miembro no es igual al segundo miembro.

Los símbolos de ≪mayor que≫ (>) y ≪menor que≫ (<), también pueden utilizarse en sentencias verdaderas.

EJEMPLOS

$3 > 1$ (3 es mayor que 1)
$14 < 17$ (14 es menor que 17)
$17 + 2 - 4 > 4$ ($17 + 2 - 4$ es mayor que 4)
$5 < 4 + 6 - 3$ (5 es menor que $4 + 6 - 3$)

Los ejemplos anteriores representan desigualdades.

Una sentencia abierta es aquella en la cual falta uno de los elementos.

SOLUCIONES DE ECUACIONES

La verdad o falsedad de una sentencia abierta no puede establecerse hasta que se reemplacen los símbolos literales por valores numéricos. Hasta hacerlo, no hay manera de decidir si la proposición es verdadera o falsa.

EJEMPLOS

$$x - 2 = y - 16$$
$$2x - 3 = y - 1$$
$$x^2 + 3 = 2x + 3$$

A veces es posible descubrir cuál o cuales valores numéricos deben reemplazar el elemento desconocido en la ecuación. Cuando esto se logra decimos que la ecuación ha sido resuelta.

EJEMPLO

$$x^2 + 3 = 2x + 3$$

Los únicos valores numéricos de x que hacen que esta proposición sea verdadera son 2 ó 0. Al reemplazar x con 2 se obtiene:

$$2^2 + 3 = 2(2) + 3$$
$$7 = 7$$

El valor numérico que reemplaza a la incógnita (2, en este caso) se llama una *raíz* de la ecuación. La cuestión es ahora, ¿cómo encontrar las raíces?

Transformaciones de una ecuación

Con frecuencia, la ecuación puede resolverse cambiando su forma mediante sumas o multiplicaciones para llegar a la solución correcta. El procedimiento básico en estos casos es bastante simple y directo.

Suma

En algunas ecuaciones muy simples, la solución es obvia, pero en otros casos se requiere más reflexión.

EJEMPLOS

1. $5 + x = 8$. Es obvio que la raíz es 3.
2. $x - 4 = 16$. La raíz es 20, por supuesto.

Los problemas anteriores son tan simples que muchas veces ni siquiera pensamos conscientemente en el método para que resolverlos. La solución aparece aún más obvia si cambiamos la forma de las ecuaciones como sigue:

$$8 - 5 = x$$
$$16 + 4 = x$$

Una manera de resolver ecuaciones consiste en sumar el *opuesto* de un elemento conocido (el mismo número, pero cambiado de signo) a los dos miembros de la ecuación. Esta fue precisamente la forma en que se resolvieron los ejemplos anteriores, aunque inconscientemente. Examinemos más cuidadosamente la forma en que ello se logra.

EJEMPLOS

1. $x + 4 = 20$
Inverso de $+4$: $-4 \rightarrow -4$
$x = 16$

Prueba: $16 + 4 = 20$

2. $x - 3 = 12$
Inverso de -3: $+3 \cdot 3$
$x = 15$

Prueba: $15 - 3 = 12$

3. $14 = x - 5$
$+5 \leftarrow +5$ *inverso de* -5
$19 = x$

Prueba: $14 = 19 - 5$

Este cambio de forma de una ecuación por medio de sumas y restas se conoce como método de *adición del opuesto.*

Multiplicación

Examinemos un ejemplo sencillo de multiplicación con el fin de apreciar como se resuelve.

EJEMPLO

$4x = 20$

4 veces $x = 20$; resolver para x.

$20 \div 4 = 5 \quad x = 5$

Prueba: $4(5) = 20$

Lo que realmente se hizo en la solución anterior fue multiplicar ambos miembros de la ecuación por el inverso de 4:

$$\frac{1}{4}(4x) = \frac{1}{4}(20)$$
$$x = 5$$

El método del *inverso* se utiliza también con división, cuando hay fracciones de por medio.

EJEMPLO

$$\frac{x}{2} = 5$$

Lo anterior podría escribirse como:

$$\frac{1}{2}\ x = 5$$

El método de solución simple es:

$$2 \times 5 = 10$$
$$x = 10$$

Las fracciones se eliminan utilizando el inverso de $\frac{1}{2}$, que es 2.

$$2\ \frac{x}{2} = 2(5)$$

Los métodos que acabamos de describir pueden utilizarse igualmente cuando haya más de un término desconocido en la ecuación. En estos casos puede ser necesario utilizar una combinación de ambos métodos.

EJEMPLOS

1. $6x = 20 - 4x$
   $+4x \leftarrow \boxed{+4x}$ *inverso de* $-4x$
   $10x = 20$
   $x = 20 \div 10 = 2$
   $x = 2$
   Prueba: $6(2) = 20 - 4(2)$
   $12 = 12$

2. $2x + 4x = 27 - 3x$
   $4x$
   $3x \leftarrow \boxed{+3x}$ *inverso de* $-3x$
   $9x = 27$
   $x = 27 \div 9 = 3 \quad \therefore x = 3$
   Prueba: $2(3) + 4(3) = 27 - 3(3)$
   $6 + 12 = 27 - 9$
   $18 = 18$

Ley distributiva

Ya se definió la *ley distributiva* en la siguiente forma: Si dos números se suman y el resultado se multiplica por un tercer número $[a(b + c)]$, el resultado será el mismo que si cada uno de los dos primeros números se multiplica por el tercero y se suman estos productos $(ab + ac)$. En forma de ecuación, la ley distributiva puede escribirse como sigue:

$$a(b + c) = ab + ac$$

La ley vale para cualquier número de elementos:

$$a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae$$

Esta ley puede utilizarse para simplificar ecuaciones. Por ejemplo, si en un mismo miembro de una ecuación aparecen $3x$ y $4x$, se pueden reemplazar por $7x$. En cambio, si los términos que aparecen son $3x$ y $4y$, no puede lograrse ninguna simplificación.

EJEMPLOS

$2x + 4x + 3y$ se simplifica a: $6x + 3y$
$3x + 4y - 1x$ se simplifica a: $2x + 4y$
$2xy + 3xy$ se simplifica a: $5xy$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 2x$ se simplifica a: $2\frac{7}{12}\ x$

Cuando dos términos tienen la misma parte literal, como los de los ejemplos anteriores, se denominan *términos semejantes* y pueden combinarse en uno sumándolos (o restándolos), simplificando así la ecuación.

ECUACIONES CONDICIONALES

En nuestra discusión hemos estado interesados principalmente en establecer la verdad de una ecuación y en resolver para las incógnitas de la ecuación.

Una expresión tal como $3x + 6$ no implica que x deba tener ningún valor específico y solo al completar la ecuación o desigualdad quedan fijados uno o más valores para x.

EJEMPLOS

1. $3x + 6 = 24$

x debe tener ahora el valor 6 para satisfacer la ecuación.

2. $3x + 6 < 14$

x debe ser uno de los números del conjunto $\{0, 1, 2\}$ para satisfacer la proposición.

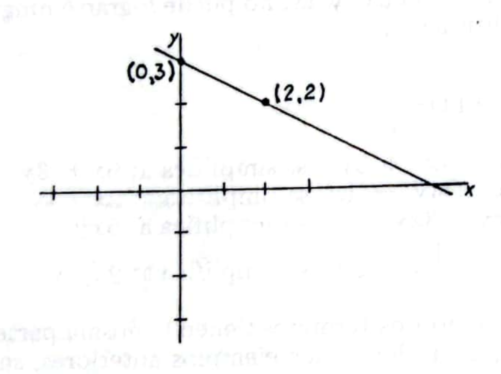
ECUACIONES LINEALES

Se mencionó anteriormente que una función se llama *lineal* cuando su gráfico está constituido por una línea recta. Las ecuaciones lineales gozan de estas mismas propiedades. Debe haber al menos dos puntos que satisfagan la ecuación para que pueda trazarse una línea recta sobre el gráfico.

EJEMPLO

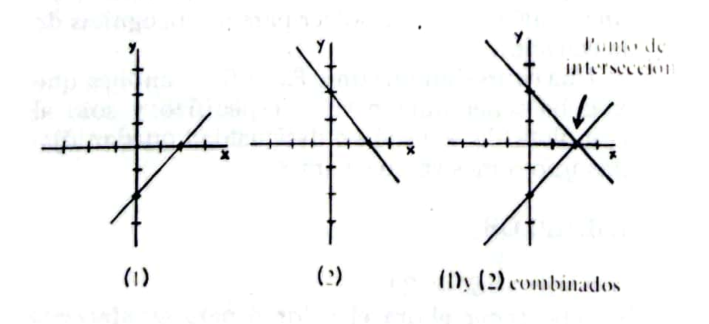
$$x + 2y = 6$$

Para satisfacer la ecuación x podría valer 0 e y valer 3; también x podría valer 2 e y valer 2. Tenemos así dos puntos (0, 3) y (2, 2).



Ecuaciones simultáneas

Con frecuencia resulta útil examinar dos ecuaciones al mismo tiempo, para buscar sus soluciones comunes.

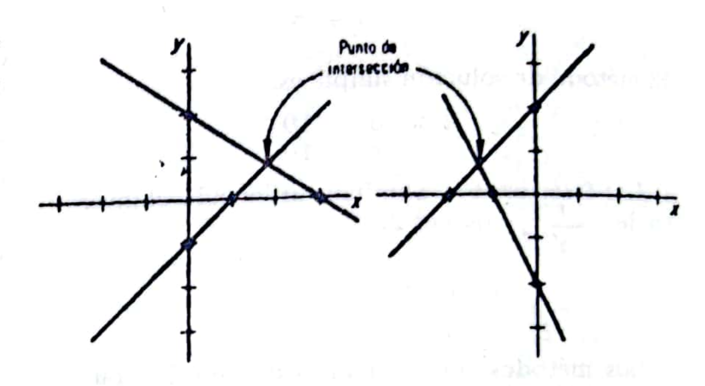


Cuando se tienen dos ecuaciones lineales de esta forma, se habla de un *sistema de ecuaciones lineales simultáneas*. La solución de este tipo de ecuaciones puede lograrse gráfica o algebraicamente. El método gráfico es mucho más rápido, pero se corre el peligro de cometer errores en el gráfico y puede ser difícil leer los valores exactos para el punto de intersección.

Solución gráfica

El método gráfico se basa en el hecho de que cuando dos líneas rectas se cortan lo hacen en un, y *solo* en un, punto de intersección. Este punto es común a las dos ecuaciones.

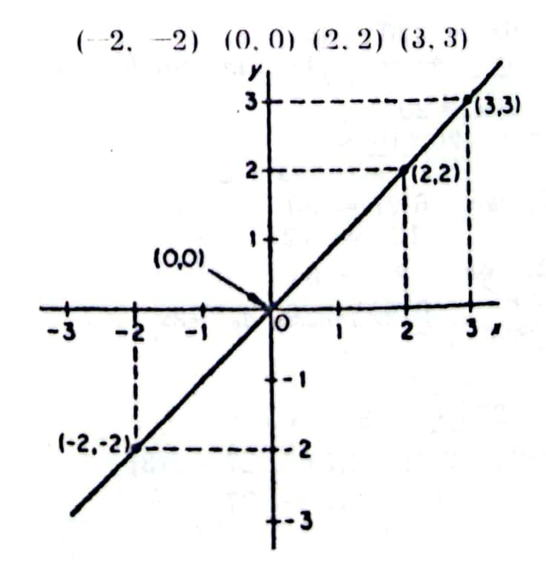
EJEMPLOS



Recordemos que cuando se especifica un par de coordenadas, el primer valor representa el dominio (eje x) y el segundo representa el rango (eje y).

EJEMPLO

$(-2, -2)$ $(0, 0)$ $(2, 2)$ $(3, 3)$

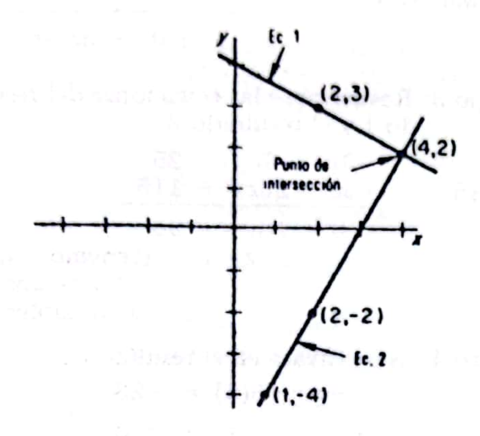


Cada una de estas parejas representa un punto en el gráfico.

Como en el ejemplo anterior, podemos dibujar dos ecuaciones lineales sobre el mismo gráfico, pero para eso deben conocerse al menos dos puntos para cada ecuación.

EJEMPLO

Ecuación 1: $x + 2y = 8$ (2, 3) (4, 2)
Ecuación 2: $2x - y = 6$ (2, −2) (1, −4)



El problema se resuelve encontrando dos puntos que satisfagan la ecuación 1 y dos puntos que satisfagan la ecuación 2. Si las dos rectas no se intersectan, no hay punto común a las dos ecuaciones. Esto solo podrá suceder si las dos rectas son paralelas.

El punto de intersección en el ejemplo anterior es la solución del problema y representa los *únicos* valores de x e y que satisfacen ambas ecuaciones. En este caso la solución es (4, 2).

Solución algebraica

El método algebraico de solución es también bastante simple. Hállase una constante tal que al multiplicar una de las ecuaciones por dicha constante se logre que una de las variables aparezca con la misma magnitud con que aparece en la otra, pero con diferente signo. Sumando luego miembro a miembro las dos ecuaciones, se elimina una variable; el valor de la otra se halla rápidamente con ayuda de los métodos descritos en las páginas anteriores.

EJEMPLO 1

Ecuación 1: $x + 2y = 8$
Ecuación 2: $2x - y = 6$ ⟶ **multiplíquese por 2:**

$$x + 2y = 8$$
$$4x - 2y = 12$$

y luego súmese ⟶ $5x + 0 = 20$

$x = 4$ $\quad 5(4) + 0 = 20$

Regrésese ahora a cualquiera de las ecuaciones originales y resuélvase para *y*.

1. $x + 2y = 8$
   $4 + 2(2) = 8 \qquad y = 2$
2. $2x - y = 6$
   $2(4) - 2 = 6 \qquad y = 2$

Regrésese ahora a cualquiera de las ecuaciones originales y resuélvase para y

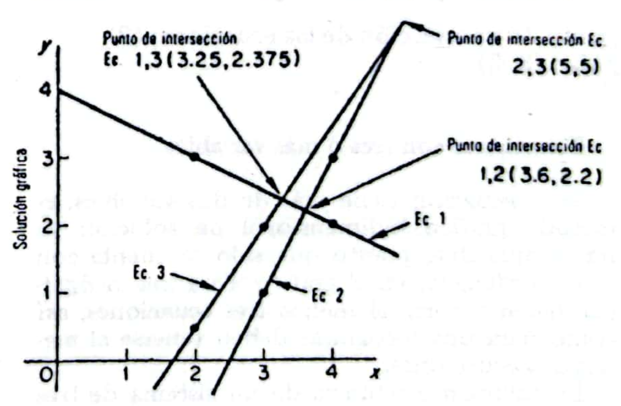
1. $x + 2y = 8$
   $4 + 2(2) = 8 \qquad y = 2$
2. $2x - y = 6$
   $2(4) - 2 = 6 \qquad y = 2$

Más de dos ecuaciones lineales

Cuando se tienen más de dos ecuaciones lineales (pero con solo dos variables) puede aún recurrirse bien al método gráfico, bien al algebraico. El proceso es un poco más complicado, pero puede tratarse tomando las ecuaciones de dos en dos.

EJEMPLO

Ecuación 1: $x + 2y = 8$ (4, 2) (2, 3)
Ecuación 2: $2x - y = 5$ (4, 3) (3, 1)
Ecuación 3: $3x - 2y = 5$ (3, 2) (2, 0, 5)



Solución algebraica:
Ecuación 1: $x + 2y = 8$
Ecuación 2: $2x - y = 5$

$$\begin{array}{lrcl} & x + 2y & = & 8 \\ (x2) & 4x - 2y & = & 10 \\ \hline & 5x + 0 & & 18 \quad x = 3{,}6 \\ & 3{,}6 + 2y & = & 8 \quad y = 2{,}2 \end{array}$$

punto de intersección de las ecuaciones (1) y (2): (3,6, −2,2)

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Ecuación 1:} & x + 2y & = & 8 \\ \textit{Ecuación 3:} & 3x - 2y & = & 5 \\ \hline & 4x + 0 & = & 13 \end{array}$$

no es necesario efectuar ninguna multiplicación, puesto que la eliminación de uno de los términos es inmediata.

$x = 3{,}25$
$3{,}25 + 2y = 8 \qquad y = 2{,}375$

punto de intersección de las ecuaciones (1) y (3): (3,25, 2,375)

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Ecuación 2:} & 2x - y & = & 5 \\ \textit{Ecuación 3:} & 3x - 2y & = & 5 \\ \hline & 5x - 3y & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} x\ (-2) \longrightarrow & -4x + 2y & = & -10 \\ & 3x - 2y & = & 5 \\ \hline & -x + 0 & = & -5 \quad x = 5 \\ & 2(5) - y & = & 5 \quad y = 5 \end{array}$$

punto de intersección de las ecuaciones (2) y (3): (5, 5)

Ecuaciones con tres o más variables

Si la ecuación tiene más de dos variables, el método gráfico bidimensional de solución ya no es aplicable, puesto que solo se cuenta con dos coordenadas en el gráfico. Para tres incógnitas deben tenerse al menos tres ecuaciones, así como para dos incógnitas deben tenerse al menos dos ecuaciones.

La solución algebraica de un sistema de tres o más ecuaciones con tres variables se logra en forma semejante a la indicada en páginas anteriores, tomando las ecuaciones de dos en dos.

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Ecuación 1:} & x + y + 2z & = & 8 \\ \textit{Ecuación 2:} & 2x - y + z & = & 1 \\ \textit{Ecuación 3:} & x + 2y - z & = & -7 \end{array}$$

Paso 1: Tómense las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Ecuación 1:}\ x(3) & 3x + 3y + 6z & = & 24 \\ \textit{Ecuación 2:} & 2x - 3y + z & = & 1 \\ \hline & 5x + 0 + 7 & = & 25 \end{array}$$

Paso 2: Tómense las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Ecuación 1:}\ x(-2) & -2x - 2y - 4z & = & -16 \\ \textit{Ecuación 3:} & x + 2y - z & = & -7 \\ \hline & -x + 0 - 5z & = & -23 \end{array}$$

Paso 3: Resuélvanse las ecuaciones del resultado 1 y el resultado 2:

$$\begin{array}{lrcl} & 5x + 7z & = & 25 \\ x(5) & -5x - 25z & = & -115 \\ \hline & 0 - 18z & = & -90 \\ & z & = & 5 \end{array}$$

(tenemos así el valor de una de las variables).

Paso 4: Sustitúyase en el resultado 2,

$-x - 5(5) = -23$
$x = -2$

Paso 5: Sustitúyase en la ecuación (1),

$-2 + y + 10 = 8$

Solución: $x = -2, \quad y = 0 \quad z = 5$

Prueba:

Ecuación: 1: $-2 + 0 + 10 = 8$
Ecuación 2: $-4 - 0 + 5 = 1$
$1 = 1$
Ecuación 3: $-2 + 0 - 5 = -7$
$-7 = -7$

Con un poco de práctica en este método se logra resolver fácilmente cualquier problema de este tipo.

RESUMEN

Terminología

Función
Relación entre dos conjuntos en la cual a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento y solo uno del segundo conjunto

Dominio
El primer conjunto en una función.
Imagen
Conjunto de elementos del segundo conjunto que se hacen corresponder a los del primero.
Representación
Lista que muestra explícitamente la relación entre los elementos del dominio y los de la imagen.
Elemento
La imagen que corresponde a un elemento dado del dominio.
Discontinua
Función que consta de puntos aislados en un gráfico sin que sea posible tomar medidas adicionales.
Continua
Función que se representa por medio de una línea no interrumpida en un gráfico sobre la cual pueden tomarse medidas continuas.
Punto de origen
Intersección de los ejes en un gráfico.
Cuadrantes
Los cuatro ángulos rectos formados por un sistema de coordenadas cartesianas.
Sentencias
Proposiciones escritas por medio de símbolos
Sentencia abierta.
Aquella que contiene uno o más elementos desconocidos.
Conjunto de sustitución
Conjunto de números, cualquiera de los cuales puede reemplazar a la incógnita en una ecuación.
Variable
Elemento en una ecuación que tiene más de un valor numérico asociado con él.
Raíz
Número que reemplaza al símbolo que representa una incógnita en una ecuación.
Opuesto
Sumar el opuesto de un elemento conocido a los dos miembros de una ecuación para simplificarla (equivale a sumar o restar una misma cantidad a ambos miembros).
Inverso
Multiplicar ambos miembros de una ecuación por el inverso de un elemento conocido para simplificarla.
Términos semejantes
Dos o más términos con la misma parte literal
Constante.
Elemento utilizado en una ecuación y que no cambia de valor.

$$= \begin{vmatrix} a_1\mathbf{A}_1 + a_2\mathbf{B}_1 & a_1\mathbf{A}_2 + a_2\mathbf{B}_2 & a_1\mathbf{A}_3 + a_2\mathbf{B}_3 \\ b_1\mathbf{A}_1 + b_2\mathbf{B}_1 & b_1\mathbf{A}_2 + b_2\mathbf{B}_2 & b_1\mathbf{A}_3 + b_2\mathbf{B}_3 \\ c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{B}_1 & c_1\mathbf{A}_2 + c_2\mathbf{B}_2 & c_1\mathbf{A}_3 + c_2\mathbf{B}_3 \\ d_1\mathbf{A}_1 + d_2\mathbf{B}_1 & d_1\mathbf{A}_2 + d_2\mathbf{B}_2 & d_1\mathbf{A}_3 + d_2\mathbf{B}_3 \end{vmatrix}.$$

Determinante de una Matriz.

MATRICES

Definición

Una matriz es un arreglo rectangular de números (o de símbolos) dispuestos en filas y columnas. Cuando se usan letras, éstas representan números reales. Lo mismo que los conjuntos, las matrices se nombran por medio de letras mayúsculas.

En una matriz, las *filas* son horizontales y las *columnas* verticales. El número de filas y de columnas de una matriz se denomina sus *dismensiones*. La matriz se representa encerrando los números del arreglo entre corchetes.

EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de la matriz A son dos filas y cuatro columnas. Se dice que A es una matriz 2 x 4.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de la matriz B son dos filas y tres columnas. Se dice que B es una matriz 2 x 3.

Cuando se usan letras para representar los elementos de una matriz se suele indicar la posición de cada elemento por medio de dos subindices; el primero indica la fila, el segundo la columna.

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Normalmente se designa todos los elementos con la misma letra, la minúscula correspondiente al nombre de la matriz, acompañada de los subíndice del caso.

Cuando la matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, se le llama *matriz cuadrada*. Si la matriz consta únicamente de una fila se llama *matriz fila* y si consta de una columna, *matriz columna;* estas dos últimas se llaman también *vectores*

EJEMPLO

matriz cuadrada · matriz fila (vector fila) · matriz columna (vector columna)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 10 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = [b_1\, b_2\, b_3\, b_4] \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

En una matriz cuadrada se define una línea imaginaria que va del vértice superior izquierdo al inferior derecho, llamada la *diagonal principal de la matriz.*

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la diagonal principal consta de aquellos elementos cuyo número de fila y número de columna son iguales (fila 1, columna 1 ; fila 2, columna 2; fila 3, columna 3).

Debe quedar bien entendido que una matriz no tiene propiamente ningún valor numérico y simplemente constituye una manera de colocar ciertos números en forma tabular. Las matrices constituyen una manera de describir sistemas de ecuaciones lineales, que luego puedan sumarse restarse o multiplicarse de acuerdo con ciertas reglas.

EJEMPLO

Ecuación 1:

$$x + y - 2z = 8$$

Ecuación 2:

$$2x - 3y + z = 1$$

Ecuación 3:

$$x + 2y - z = -7$$

La matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz no tiene ningún significado, hasta tanto se la relacione con las variables x, y, z y con los segundos miembros de las ecuaciones respectivas (8,1, -7).

Matrices iguales

Antes de entrar a la suma, resta, multiplicación e inversión de matrices, conviene conocer algunos tipos de matrices.

Dos matrices son *iguales si todos* los elementos correspondientes en ambas matrices son iguales.

EJEMPLOS

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Podemos decir que $A = B$.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

Si se dice que estas dos matrices son iguales ($A = B$), ello implica que:

$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = 2, \quad b_{13} = 3$$
$$b_{21} = 4, \quad b_{22} = 5, \quad b_{23} = 6$$

3. $$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2 - 1 \\ 3 - 1 + c \\ 2 + 3 - 1 \end{bmatrix}$$

Lo anterior implica que:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 2 + c$$
$$a_3 = 4$$

SUMA Y RESTA DE MATRICES

La suma de matrices exige igualdad, pero no la de los elementos, sino la de dimensiones. Para que dos matrices puedan sumarse deben tener el mismo número de filas y columnas.

Si dos matrices tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas se dice que son *equivalentes* y su suma se obtiene sumando los elementos correspondientes (elemento de subíndice 11 con el elemento de subíndice 11, 12 con 12, 13 con 13, etc.).

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad A + B = a_{11} + b_{11}$$
$$a_{12} + b_{12}$$
$$a_{13} + b_{13}$$
$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \qquad a_{21} + b_{21}$$
$$a_{22} + b_{22}$$
$$a_{23} + b_{23}$$

Se forma así una nueva matriz que podemos llamar C:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que si dos matrices tienen diferentes tamaños, no sería posible sumar todos los elementos correspondientes. Algunos elementos de la matriz mayor se quedarían sin compañeros. El siguiente ejemplo ilustra el método de sumar matrices utilizando números reales, con lo cual es fácil seguir el proceso.

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2 + 3 = 5 \qquad 6 + (-2) = 4$$
$$-3 + 2 = -1 \qquad 1 + 3 = 4$$
$$4 + (-1) = 3 \qquad -2 + 4 = 2$$

Con lo cual resulta que

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

La resta de matrices sigue el mismo procedimiento y tiene los mismos requisitos. Las filas y columnas de las dos matrices deben tener la misma longitud y se procede restando un elemento de la segunda matriz del correspondiente elemento de la primera, continuando así hasta restar todos los elementos. Los resultados de estas restas forman una nueva matriz.

EJEMPLO

Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Cálculos:

$$\begin{aligned} A - B = \quad & 2 - 3 = -1 \\ & -3 - 2 = -5 \\ & 4 - (-1) = 5 \\ & 6 - (-2) = 8 \\ & 1 - 3 = -2 \\ & -2 - 4 = -6 \end{aligned}$$

Resultado:

$$C = A - B = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACION DE MATRICES

Para multiplicar una matriz por un número se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por dicho número. Esta regla es válida cualesquiera que sean las dimensiones de la matriz.

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Multiplíquese la matriz A por 3:

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 6 \\ 12 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Supongamos ahora que se tiene el siguiente problema

$2A + B = C$ (donde A, B, C son matrices)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

El primer paso consiste en multiplicar A por 2; luego se suma la matriz producto con B.

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 8 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = 2A + B = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 10 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Dos matrices pueden multiplicarse una por otra si se cumplen ciertas condiciones. En este tipo de multiplicación los elementos se multiplican por filas y por columnas; por tanto, la primera matriz debe tener tantas columnas como filas tenga la segunda. En el ejemplo anterior, la matriz A tiene *tres columnas* y B tiene *dos filas; por tanto, no pueden multiplicarse una por otra.*

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz A tiene *tres columnas;* la matriz B tiene *tres filas*. La condición se cumple y estas dos matrices pueden multiplicarse. No hay limitaciones en cuanto al número de filas de la matriz A, ni al número de columnas de B.

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A tiene dimensiones 4 x 3, B dimensiones 3 x 5; obsérvese cuáles son los dos números que deben ser iguales: 4 x 3, 3 x 5.

El proceso de la multiplicación es, en realidad, una combinación de multiplicaciones y sumas, como resultado del cual se obtiene una nueva matriz formada por los números multiplicados y que tiene tantas *filas* como A y tantas *columnas* como B. En el ejemplo anterior la nueva matriz tendría dimensiones 4 x 5.

Método para multiplicar matrices

La multiplicación de dos matrices es una operación laboriosa y larga. La mejor manera de ilustrar el procedimiento será a través de un ejemplo;

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Los elementos de cada *fila* de la matriz A se multiplican por los de cada *columna* de la matriz B sumando los resultados de cada una de estas multiplicaciones.

Resulta más sencillo entender el proceso si utilizamos números:

$a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}$ = nuevo elemento$_{11}$
$a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22}$ = nuevo elemento$_{12}$
$a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21}$ = nuevo elemento$_{21}$
$a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22}$ = nuevo elemento$_{22}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Paso 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 5 + 4 \times 7 = 43$$

Paso 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 6 + 4 \times 8 = 50$$

Paso 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 5 + 3 \times 7 = 31$$

Paso 4:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 6 + 3 \times 8 = 36$$

$$3 \times 5 + 4 \times 7 = 43$$
$$3 \times 6 + 4 \times 8 = 50$$
$$2 \times 5 + 3 \times 7 = 31$$
$$2 \times 6 + 3 \times 8 = 36$$

Resultado de la multiplicación:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 43 & 50 \\ 31 & 36 \end{bmatrix}$$

He aquí otro ejemplo utilizando matrices ligeramente mayores, para ayudar a aclarar el proceso.

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

A tiene dimensiones 2×3 y B 3×3; pueden ser multiplicadas.

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3 \times (-2) + (-2) \times 4 + 4 \times 2 = -6 \\ c_{12} &= 3 \times 3 + (-2) \times (-2) + 4 \times 1 = 17 \\ c_{13} &= 3 \times (-1) + (-2) \times (-3) + 4 \times (-2) = -5 \end{aligned}$$

Hemos completado así la primera fila de A por las tres columnas de B.

$$\begin{aligned} c_{21} &= -2 \times (-2) + 1 \times 4 + (-3) \times 2 = 2 \\ c_{22} &= -2 \times 3 + 1 \times (-2) + (-3) \times 1 = -11 \\ c_{23} &= -2 \times (-1) + 1 \times (-3) + (-3) \times (-2) = 5 \end{aligned}$$

Hemos completado ahora el producto de la segunda fila de A por las tres columnas de B. El resultado es la nueva matriz C.

$$C = AB = \begin{bmatrix} -6 & 17 & -5 \\ 2 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz producto C resulta de dimensiones 2×3, tal como esperábamos.

No es posible hallar el producto de A por B no se cumple la regla sobre las dimensiones. En algunos casos será posible hallar el producto de B por A; generalmente, éste será diferente del producto AB.

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(matriz 2×3) (matriz 2×2)

no pueden multiplicarse

Invirtamos ahora el orden:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(2×2) (2×3)

pueden multiplicarse

$$
\begin{array}{l}
-2 \times 3 + 2 \times -2 = -10 \\
-2 \times (-2) + 2 \times 4 = 12 \\
-2 \times (-3) + 2 \times (-1) = 4 \\
\hline
3 \times 3 + (-3) \times (-2) = 15 \\
3 \times (-2) + (-3) \times 4 = -18 \\
3 \times (-3) + (-3) \times (-1) = -6
\end{array}
$$

$$C = BA = \begin{bmatrix} -10, & 12, & 4 \\ 15, & -18, & -6 \end{bmatrix}$$

Anteriormente, en este mismo capítulo, habíamos multiplicado dos matrices sencillas 2 × 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad C = AB = \begin{bmatrix} 43 & 50 \\ 31 & 36 \end{bmatrix}$$

Invirtamos el orden de los factores para mostrar que $AB \neq BA$:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{l}
5 \times 3 + 6 \times 2 = 27 \\
5 \times 4 + 6 \times 3 = 38 \\
\hline
7 \times 3 + 8 \times 2 = 37 \\
7 \times 4 + 8 \times 3 = 52
\end{array}
\qquad C = BA = \begin{bmatrix} 27 & 38 \\ 37 & 52 \end{bmatrix}
$$

Multiplicación de vectores

La multiplicación por matrices fila (vectores fila) se rige por las mismas reglas que cualquier otra multiplicación de matrices; si una matriz fila se multiplica por una matriz columna el resultado no es una matriz, sino un número único.

EJEMPLO

1.

$$A = [2 \quad 3 \quad 4] \quad \text{(matriz } 1 \times 3\text{)} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz } 3 \times 2\text{)}$$

$$
\begin{array}{l}
2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 29 \\
2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 = 20
\end{array}
$$

$$C = AB = [29 \quad 20] \quad \text{(matriz } 1 \times 2\text{)}$$

2. $A = [4 \quad 3 \quad 2]$ (matriz 1 × 3) $\qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (matriz 3 × 1)

El resultado deberá ser una matriz 1 × 1, que no es otra cosa que un número único:

$$4 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 = 25$$

En este caso:

$$C = AB = 25$$

3. Obsérvese lo que sucede si se invierte el orden:

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (matriz 3 × 1) $\qquad B = [4 \quad 3 \quad 2]$ (matriz 1 × 3)

La matriz resultante (C) tendrá dimensiones 3 × 3:

(primera fila)	(segunda fila)	(tercera fila)
2 × 4 = 8	3 × 4 = 12	4 × 4 = 16
2 × 3 = 6	3 × 3 = 9	4 × 3 = 12
2 × 2 = 4	3 × 2 = 6	4 × 2 = 8

$$C = AB = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 12 & 9 & 6 \\ 16 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTES

Es necesario aprender bastante respecto a la manipulación de matrices con el fin de poder resolver sistemas simultáneos de ecuaciones lineales en forma matricial.

Hasta ahora, hemos aprendido a sumar, restar y multiplicar matrices; no es posible dividir matrices y, por tanto, hemos cubierto todas las operaciones aritméticas básicas.

En una matriz 2 x 2, llámase *determinante* al número resultante de restar el producto de los elementos de la diagonal principal del de los elementos de la diagonal opuesta.

EJEMPLOS

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ diagonal principal: $4 \times 5 = 20$
diagonal opuesta: $3 \times 2 = 6$
determinante: 14

Para indicar el determinante se utiliza un par de líneas verticales.

$|A| = 14$ (el determinante de la matriz A vale 14).

2. $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

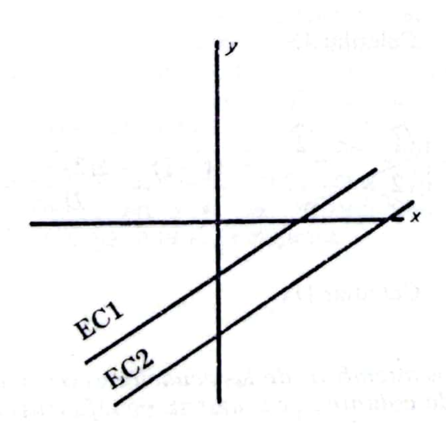
Para cualquier par de matrices 2 × 2, la ecuación puede escribirse:

$$|B| = (b_{11} \times b_{22}) - (b_{12} \times b_{21})$$

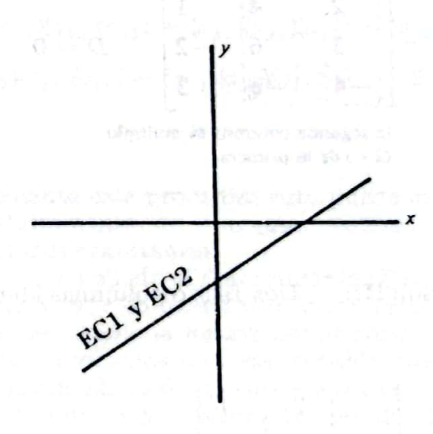
La abreviatura de determinantes es la letra mayúscula D. Para evitar confusiones, ninguna matriz debe llamarse "D" y así cuando se utilice "D" se referirá a "determinante", no a una matriz.

Incompatibilidad y dependencia

Si el determinante de una matriz vale cero, no hay solución para las variables en un sistema de ecuaciones lineales. Si esto ocurre, las ecuaciones se llaman *incompatibles*. La incompatibilidad puede compararse con las ecuaciones lineales paralelas que no tienen punto de intersección.



Dos ecuaciones se llaman *dependientes* si forman la misma línea sobre un gráfico, de tal manera que tendrían un infinito número de puntos de intersección.



No existe solución para un sistema de ecuaciones *incompatibles* o *dependientes*. Examinando cualquier matriz cuadrada (no importan sus dismensiones) veremos que el determinante vale cero si se cumple una de las siguientes condiciones (para los ejemplos se usarán matrices 3 x 3):

Condición 1: Todos los elementos de una fila o columna iguales a cero.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Condición II: Una fila o columna es múltiplo de otra fila o columna.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

la tercera fila es múltiplo (3 ×) de la primera

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -4 & -8 & 3 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

la segunda columna es múltiplo (2 ×) de la primera

Condición III: Dos filas o columnas idénticas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Solución de ecuaciones simultáneas por determinantes

Las determinantes son con frecuencia útiles para resolver los sistemas de ecuaciones que posean solución. Para resolver un sistema con dos variables (x, y) pueden utilizarse las siguientes ecuaciones básicas:

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D}$$

El siguiente ejemplo muestra la solución de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, utilizando las anteriores ecuaciones, pero antes deben obtenerse los valores de los determinantes D, Dx, Dy. La manera de obtenerse Dx, y Dy debe examinarse muy cuidadosamente.

EJEMPLO

Ecuación 1: $x + 2y = 8$

Ecuación 2: $2x - y = 6$

Paso 1: Calcular D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1(-1) - 2(2) = -5$$

$$D = -5$$

Paso 2: Calcular Dx.

segundos miembros de las ecuaciones originales
segunda columna de la matriz —coeficiente de y

$$Dx = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = 8(-1) - 2(6) = -20$$

$$Dx = -20$$

Paso 3: Calcular Dy.

primera columna de la matriz —coeficientes de x

$$Dy = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 1(6) - 8(2) = -10$$

$$Dy = -10$$

Paso 4:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-20}{-5} = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$$

La solución de las ecuaciones es (4, 2).

Prueba:

Ecuación 1:

$$4 + 2(2) = 8$$

Ecuación 2:

$$2(4) - 2 = 6$$

Soluciones para tres variables

Cuando se requiere resolver un sistema de ecuaciones con tres variables, hay varias maneras de llegar a la solución. El método que presentaremos se suele denominar regla de Cramer.

El primer paso consiste en calcular el determinante de la matriz básica. Este cálculo requiere algunas operaciones aritméticas más que las que se requerían en el caso de una matriz 2 x 2, pero la idea general es semejante.

Paso 1:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(a) Multiplíquense los elementos de la diagonal principal (a_{11}, a_{22}, a_{33}).
(b) Súmese el producto de los elementos (a_{21}, a_{32}, a_{13}).
(c) Súmese el producto de los elementos (a_{31}, a_{23}, a_{12}).

Paso 2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(a) Réstese el producto de los elementos de la diagonal opuesta (a_{13}, a_{22}, a_{31}).
(b) Réstese el producto de los elementos (a_{23}, a_{32}, a_{11}).
(c) Réstese el producto de los elementos (a_{33}, a_{21}, a_{12}).

$$D = (a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{21})(a_{32})(a_{13}) + (a_{31})(a_{23})(a_{12})$$
$$- (a_{13})(a_{22})(a_{31}) - (a_{23})(a_{32})(a_{11}) - (a_{33})(a_{21})(a_{12})$$

Mediante este procedimiento puede calcularse el determinante de cualquier sistema de tres ecuaciones simultáneas.

Una vez hallado el determinante (D) se resuelve para x, y, z en forma semejante. Para cada variable, se cambia la matriz remplazando los coeficientes asociados con esa variable con los segundos miembros de las tres ecuaciones.

El cálculo de los valores de las variables se logra mediante las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{Dx}{D}$$ determinante Dx de la matriz modificada / determinante del sistema original

$$y = \frac{Dy}{D}$$

$$z = \frac{Dz}{D}$$

Un ejemplo ayudará a clarificar el método.

EJEMPLO

Ecuación 1:

$$x + y + 2z = 8$$

Ecuación 2:

$$2x - 3y + z = 1$$

Ecuación 3:

$$x + 2y - z = -7$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Antes de calcular D, construyamos las matrices cuyos determinantes se utilizarán al resolver para x, y y z.

$$Dx = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad x = \frac{Dx}{D}$$

Obsérvese el remplazo de los coeficientes de x:

$$Dy = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \frac{Dy}{D}$$

Ahora se han remplazado los coeficientes de y:

$$Dz = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} \qquad z = \frac{Dz}{D}$$

Finalmente, se han remplazado los coeficientes de z.

A continuación se calcula el determinante de cada matriz y, tras las divisiones finales, se llega a los valores de x, y, z.

$$|D| = (1)(-3)(-1) + (2)(2)(2) + (1)(1)(1) - (2)(-3)(1) - (1)(2)(-1) - (1)(2)(1)$$

$$3 + 8 + 1 + 6 + 2 - 2 = 18$$

$$|Dx| = 8(-3)(-1) + (1)(2)(2) + (-7)(1)(1) - (-7)(-3)(2) - (1)(1)(-1) - (8)(2)(1)$$

$$24 + 4 - 7 - 42 + 1 - 16 = -36$$

$$x = \frac{-36}{18} = -2$$

$|Dy|$ y $|Dz|$ se resuelven en forma semejante.

MATRICES ESPECIALES

Existe cierto número de técnicas matriciales especiales y de tipos especiales de matrices que el estudiante debe conocer, al menos en cuanto a saber de su existencia. No intentaremos en este punto dar la utilización práctica de estas matrices, pero el estudiante dispondrá de estos conocimientos en el momento en que lo requiera.

Transpuesta

La transpuesta de una matriz se obtiene intercambiando sus filas y columnas.

EJEMPLOS

1. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Para indicar la transpuesta se utiliza el superíndice T.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que una matriz cuadrada permanece cuadrada, pero, en cambio, una matriz 2 x 3 se convierte en 3 x 2.

Podemos dar tres reglas en relación con la transpósiión de matrices:

Regla 1: La transpuesta de una matriz transpuesta es la matriz original.

$$(A^T)^T = A$$

Regla 2: La transpuesta de la suma de dos matrices (A y B) es igual a la transpuesta de A más la transpuesta de B.

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Regla 3: La transpuesta del producto de dos matrices (A y B) es igual a la transpuesta de B multiplicada por la transpuesta de A.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Las reglas 2 y 3 sólo son aplicables si las matrices se ajustan a las reglas de la suma y la multiplicación matriciales.

Matrices simétricas

Una matriz es simétrica cuando su transpuesta es identica a la matriz original.

EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Una matriz simétrica debe ser cuadrada. El ejemplo anterior muestra que:

$$A = A'$$

Regla 4 : Si una matriz se multiplica por su transpuesta el producto será una matriz simétrica.

$$AA^T = B \text{ (matriz simétrica)}$$

Prueba:

1. $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

Multiplicando estas dos matrices se obtiene:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 21 \end{bmatrix} \qquad (AA^T)^T = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 21 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de una matriz 4 x 3 por una matriz 4 x 3 será una matriz 4 x 4:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 14 & 9 & -12 \\ -2 & 9 & 9 & 5 \\ -5 & -12 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(AA^T)^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 14 & 9 & -12 \\ -2 & 9 & 9 & -5 \\ -5 & -12 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

Matrices triangulares y diagonales

Llamase matriz triangular la matriz cuadrada que tiene solo ceros por encima o por debajo de la diagonal principal. La diagonal puede contener números reales diferentes de cero o bien puede contener también ceros.

EJEMPLOS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son ceros, la matriz se llama diagonal. Los elementos de la diagonal pueden ser ceros u otros números.

EJEMPLOS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que toda matriz diagonal es también triangular. Véase la matriz C del ejemplo anterior.

Submatrices

Es posible construir varias submatrices cuadradas a partir de una matriz rectangular dada.

EJEMPLOS

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (matriz 2 x 3)

De una matriz 2 x 3 pueden extraerse tres diferentes submatrices cuadradas:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ (matriz 3 x 4)

Al subdividirla:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

(más toda una serie de matrices 2 x 2).

Este concepto es a menudo útil, ya que ciertas operaciones que no pueden efectuarse sobre matrices rectangulares, sí pueden efectuarse sobre matrices cuadradas.

Terminología

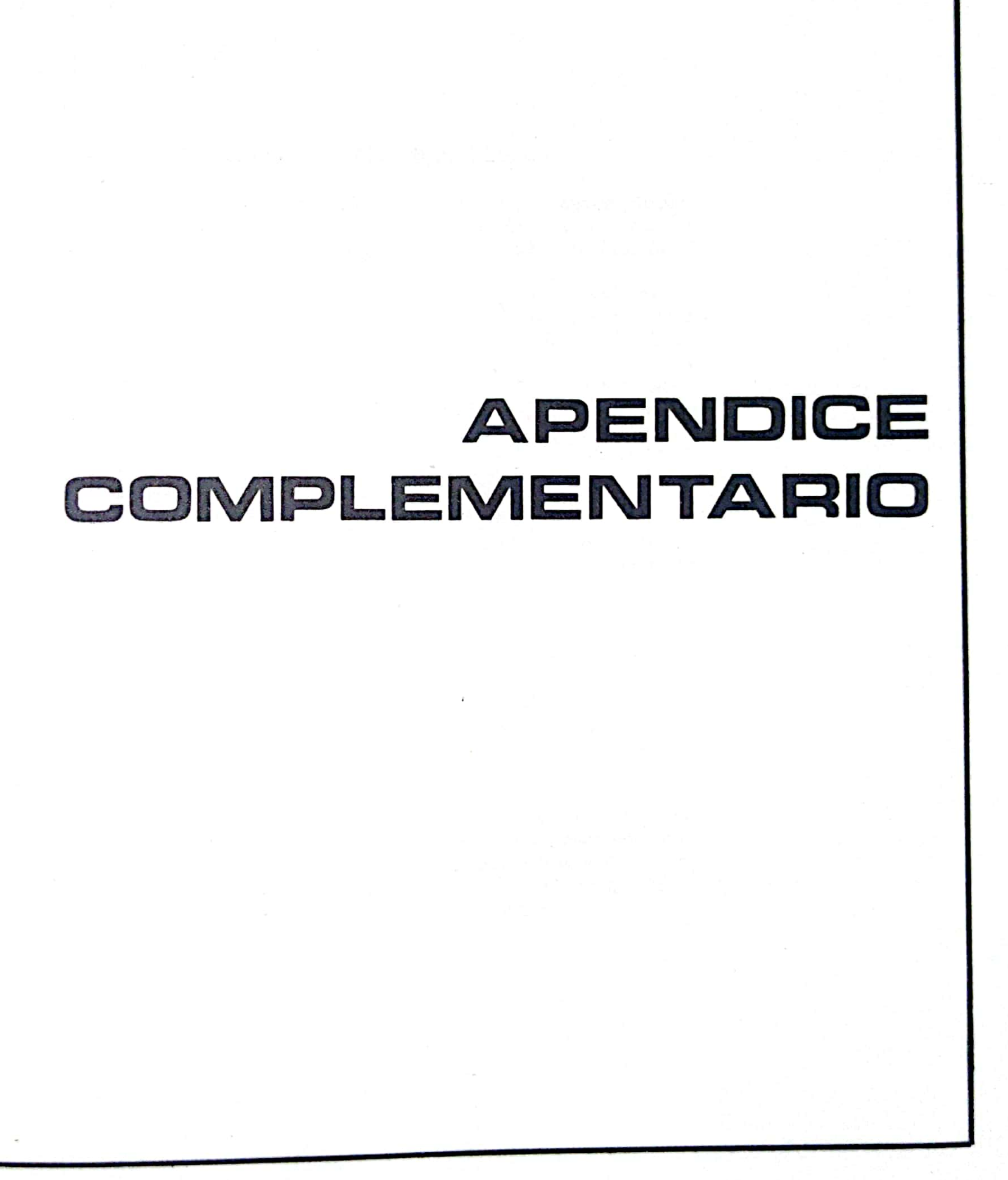
Símbolos

D	determinante
/A/	Determinante de la matriz A
A^t	Transpuesta de la matriz A

Terminología

Matriz	arreglo o colección de números o símbolos dispuestos en una serie de filas y columnas.
Dimensiones (de una matriz)	número de filas y de columnas.
Matriz cuadrada	matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.
Diagonal principal	en una matriz cuadrada, los elementos situados sobre la línea que va del vértice superior izquierdo al inferior derecho.
Matrices iguales	aquellas en que los elementos correspondientes son identicos.
Submatrices	matrices cuadradas de menores dimensiones extraídas de una matriz rectangular dada.
Matrices equivalentes	dos matrices de las mismas dimensiones, es decir, que tienen el mismo número de filas y columnas.
Vector	matriz de una sola fila o una sola columna.
Determinante	valor numérico asociado a una matriz cuadrada obtenido como suma de una serie de productos formados de acuerdo a ciertas reglas.
Incompatible	caso en el cual no hay posible solución a una matriz por no haber punto de intersección.
Dependiente	caso en el cual no hay posible solución a una matriz por haber infinito número de intersecciones.
Transponer	intercambiar filas y columnas en una matriz.
Matriz simétrica	aquella cuya transpuesta es idéntica a la matriz original.
Matriz triangular	matriz cuadrada que contiene solo ceros, sea por encima o por debajo de la diagonal principal.
Matriz diagonal	matriz cuadrada todos cuyos elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

INDICE



APENDICE COMPLEMENTARIO

APENDICE COMPLEMENTARIO

En ocasiones, la resolución de ciertos problemas matemáticos hacen necesaria la utilización de tablas de logaritmos o de tablas de funciones trigonométricas.

Otras veces necesitamos disponer rápidamente del cuadrado o del cubo de un número, o quizás de su raíz cuadrada o de su raíz cúbica. El cálculo del área de una superficie o el volumen de un sólido implican el recordar una fórmula o el disponer de una tabla en el que aparezcan estas claramente explicadas. El "Apéndice Complementario" para facilitar cualquiera de los casos antes citados, incluye los siguientes puntos:

1) Tabla de logaritmos. Su uso.
2) Tabla de Funciones Trigonométricas. Su uso.
3) Sistema Métrico. Factores de Conversión de un sistema a otro. Equivalencias.
4) Cuadrados y Cubos de los números del 1 al 100.
5) Raíces cuadradas y cúbicas de los números del 1 al 100.
6) Números Primos del 1 al 1000.
7) Números romanos y arábigos.
8) Areas y volúmenes.
9) Curiosidades Matemáticas.
10) Test: "Talento Matemático".

El apartado "Curiosidades Matemáticas, tiene como objetivo el conseguir el aprendizaje mediante el regocijo. Es verdaderamente un juego placentero el encontrar la explicación matemática a los problemas aquí planteados.


LOGARITHMORVM
CANONIS DESCRIPTIO,
SEV
ARITHMETICARVM SVPPVTATIONVM
MIRABILIS ABBREVIATIO.
Eiusque usus in utraque Trigonometria, ut etiam in omni
Logistica Mathematica, amplissimi facillimi &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonij, &c. SCOTO.
LVGDVNI,
Apud Barth. Vincentium.
M. DC. XX.
Cum Privilegio Caesar. Majest. & Christ. Galliarum Regis.

Tablas de Logaritmos.

1) TABLA DE LOGARITMOS. SU USO

LOGARITMOS.—

El logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar otro número llamado base del sistema, para obtener el número dado.

Los logaritmos de los que nos ocuparemos tienen por base 10, y se les conoce también como logaritmos vulgares, decimales o de Briggs.

El logaritmo de un número consta de dos partes: la característica y la mantisa.

La característica se encuentra aplicando la regla que detallamos a continuación:

1) La característica es positiva si el número es mayor que 1 y negativa si el número está entre 0 y 1.
2) La característica de los números comprendidos entre 1 y 10 es cero.
3) Para hallar la característica de un número mayor que 1, se resta una unidad al número de cifras de su parte entera.
   Ejemplos:
   5413 tiene 4 cifras; la característica de su logaritmo es 3.
   486 tiene 3 cifras; la característica de su logaritmo es 2.
   4 tiene 1 cifra; la característica de su logaritmo es 0.
   4515.65 tiene 4 cifras en su parte entera; luego, la característica de su logaritmo es 3.
4) Para hallar la característica de un número menor que 1, se suma la unidad al número de ceros que hay entre el punto decimal y la primera cifra significativa.
   Esta característica es negativa.
   Ejemplos:
   La característica de log. 0.6 es −1
   La característica de log. 0.03 es −2
   La característica de log. 0.007 es −3
   Cuando se escribe un logaritmo cuya característica es negativa, el signo menos se coloca sobre la característica y no delante de ella, porque de esta manera afectaría a todo el logaritmo y las mantisas son siempre positivas.
   Ejemplos:
   log. 0.04 = $\bar{2}.6021$, que significa $-2+0.6021$
   log. 0.0008 = $\bar{4}.9031$, que significa $-4+0.9031$

Tabla de logaritmos

La tabla que incluímos nos permite resolver dos tipos de problemas:

A) Hallar el logaritmo de un número dado
B) Hallar el antilogaritmo de un logaritmo dado.

A) Hallar el logaritmo de un número dado:

La tabla nos permite únicamente determinar la mantisa del logaritmo. La característica debemos encontrarla aplicando la regla detallada en la introducción.

Para hallar la mantisa:

1. Cuando se trata de un número de una cifra:
Se toma la mantisa de la decena correspondiente a dicho número, en la columna encabezada por "0".
Ejemplos:

$$\log 1 = 0.0000$$
$$\log 2 = 0.3010$$

2. Cuando se trata de un número de dos cifras:
Se busca el número en la columna "N" y se toma la mantisa en la columna encabezada por "0".
Ejemplos:

$$\log 28 = 1.4472$$
$$\log 76 = 1.8808$$

3. Cuando se trata de un número de tres cifras:
Se buscan las dos primeras cifras en la columna "N" y se toma la mantisa en la columna correspondiente a la tercera cifra.
Ejemplos:

$$\log 215 = 2.3324$$
$$\log 489 = 2.6893$$

4. Cuando se trata de un número de más de tres cifras:
Este caso vamos a explicarlo desarrollando un ejemplo. Hallemos log. 3.105. Primero determinamos la característica. Como la parte entera tiene una sola cifra, dicha característica es cero.
Determinemos la mantisa: se consideran las tres primeras cifras y buscamos log. 3.10 y log 3.11

$$\log 3.10 = 0.4914$$
$$\log 3.11 = 0.4928$$

$$\begin{array}{r} \log 3.11 = 0.4928 \\ \log 3.10 = \underline{0.4914} \\ 0.0014 \end{array}$$

0.0014 es la diferencia correspondiente a 0.01.
Sabiendo esta diferencia calculamos la diferencia correspondiente a 0.005:

$$0.01 \text{ ——— } 0.0014$$
$$0.005 \text{ ——— } X$$

$$X = \frac{0.005 \times 0.0014}{0.01} = \frac{0.0000070}{0.01}$$

$$X = 0.00070$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Entonces:} & \log 3.10 & = & 0.4914 \\ \text{Diferencia para} & 0.005 & = & \underline{0.00070} \\ & \log.\ 3.105 & = & 0.49210 \end{array}$$

B) Hallar el antilogaritmo de un logaritmo dado:

1. Cuando el logaritmo figura en la tabla:
Cuando la mantisa se encuentre en la columna encabezada por "0", el logaritmo se encuentra en la columna encabezada por "N"
Ejemplo:

$$\log x = 1.6628$$
$$x = 46$$

Cuando la mantisa se encuentra en una columna encabezada por "1", "2", etc., dicha cifra se coloca a continuación de las cifras tomadas en la columna "N". La característica nos determina la posición del punto decimal, o sea, el número de cifras de la parte entera.
Ejemplos:

$$\log y = 2.8932$$
$$y = 782$$
$$\log z = 1.7959$$
$$z = 0.625$$

2. Cuando el logaritmo no figura en la tabla:
Este caso también vamos a explicarlo con un ejemplo:
Tenemos $\log x = 1.3475$. Queremos determinar el valor de x; es decir el antilogaritmo correspondiente al logaritmo 1.3475.
Sabemos que la característica es 1, ello significa que el número tiene dos cifras en su parte entera. Nos falta buscar cuales son estas cifras y esto lo da la mantisa 0.3475.
Buscamos en la tabla la mantisa que más se aproxime por **defecto.** En este caso encontramos que la mantisa 0.3464 corresponde al número 22 en la columna "2". Es decir, a un número cuyas cifras son 222.
Como sabemos que el número tiene dos cifras de parte entera, tenemos que aproximadamente el valor buscado es 22.2.
Si queremos obtener una aproximación mayor, es decir, más cifras decimales, hacemos lo siguiente:

a) Hallamos la diferencia entre la mantisa que tenemos y la que hemos tomado de la tabla. A esta diferencia la llamaremos 1ra. diferencia:

$$\begin{array}{r} 0.3475 \\ 0.3464 \\ \hline \end{array}$$

1ra. diferencia = 0.0011

b) Hallamos la diferencia entre la mantisa tomada en la tabla y la mantisa siguiente que corresponde al número 223. A esta la llamaremos 2da. diferencia:

$$\begin{array}{r} 0.34.83 \\ 0.3464 \\ \hline \end{array}$$

2da. diferencia = 0.0019

c) Ahora decimos:
Si 19 corresponde a una diferencia de 1
11 corresponde a una diferencia de X

$$X = \frac{11}{19} = 0.5789$$

Luego, las cifras del número buscado son: 22.25789.

TABLAS DE LOGARITMOS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2830	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

TABLAS DE LOGARITMOS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

2) TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. SU USO.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Tabla de Funciones Trigonométricas Naturales

Esta tabla se emplea para resolver dos cuestiones:

A. Hallar el valor de una función trigonométrica de un ángulo dado.

B. Hallar un ángulo partiendo de una función trigonométrica de dicho ángulo.

A. Hallar el valor de una función trigonométrica:

Consideramos dos casos:

1.— Cuando el ángulo dado figura en la tabla:

Si el valor de la función que queremos hallar corresponde a un ángulo menor que 45°, se busca el ángulo en la 1a. columna de la izquierda y el nombre de la función en la fila vertical correspondiente.

El valor de la función trigonométrica se encuentra en la intersección de la fila donde se lee el ángulo y la columna encabezada por la función trigonométrica buscada.

Ejemplo: Hallar tan 35°40'

tan 35°40' = 0.5831

Para hallar el valor de una función de un ángulo mayor que 45°, buscamos el ángulo en la última columna de la derecha y el nombre de la función en la última fila inferior.

El valor de la función se halla en la intersección de la fila y la columna al igual que en el caso anterior.

Ejemplo: Hallar csc 63°30'

csc 63°30' = 1.127

2.— Cuando el ángulo dado no figura en la tabla:

En este caso, el valor de la función trigonométrica se encuentra **interpolando** entre dos valores próximos al valor buscado, uno superior y otro inferior, que se hallan en la tabla, y de ellos, deducir el valor buscado.

Ejemplo: Hallar cos 38°25'

Como el ángulo está comprendido entre 38° 20' y 38°30', hallamos los cosenos de estos valores.

cos 38°20' = 0.7844
cos 38°30' = 0.7826

10' = 0.0018

Determinando la proporción correspondiente, tenemos:

10' ———— 0.0018
5' ———— x

$$x = \frac{0.0018 \cdot 5}{10} = \frac{0.009}{10}$$

x = 0.0009

cos 38°20' = 0.7844
proporción a 5' = 0.0009

cos 38°25' = 0.7835

Obsérvese que en este caso, el valor obtenido para los 5' se **resta**, porque al aumentar el ángulo, el coseno **disminuye**. Lo mismo ocurre con la **cotangente** y la **cosecante.**

Ejemplo: Hallar sen 73°50'

sen 73°60' sen 74° = 0.9613
sen 73°50' = 0.9605

10' 0.0008

10' ———— 0.0008
3' ———— x

$$x = \frac{0.0008 \cdot 3}{10} \quad \frac{0.0024}{10}$$

x = 0.00024

sen 73°50' 0.9650
3' 0.00024

sen 73°53' = 0.96074

En este caso, el valor obtenido para los 3' se **suma,** porque al aumentar el ángulo, el seno **aumenta.** Lo mismo sucede con la **tangente** y la **secante.**

B. Hallar un ángulo partiendo de una función trigonométrica de dicho ángulo.

También se consideran dos casos:

1.— Cuando el valor de la función trigonométrica figura en la tabla:

Hemos visto que hay dos filas de funciones trigonométricas, una superior y otra inferior, que figuran a la cabeza y al pie de cada columna. Para hallar el ángulo correspondiente a una función trigonométrica dada, debemos seguir los siguientes pasos:

a) Determinar si el valor de la función trigonométrica que tenemos corresponde a la fila superior o a la inferior, tal como vimos en el primer caso de la parte A.

b) Si el nombre de la función dada está en la fila superior, quiere decir que se trata de un ángulo menor que 45º y para hallar su valor debemos fijarnos en la primera columna de la izquierda.

Ejemplo: Si cos α = 0.8816
Hallar el ángulo α

Observese que el valor 0.8816 está en la columna encabezada por "cos"; por lo tanto, debemos buscar el valor del ángulo que le corresponde en la primera columna de la izquierda.
Vemos que es 28º10'. Luego, α = 28º10'.

c) Si el nombre de la función está en la fila inferior, implica que el ángulo que queremos conocer es mayor que 45º, y por lo tanto debemos buscarlo en la última columna de la derecha.

Ejemplo: si cos β = 0.5807
Hallar el ángulo

El valor 0.5807 lo encontramos en la columna cuyo pie corresponde a "cos"; luego, debemos buscar el ángulo en la última columna de la derecha. Vemos que este es 35º30'. Por consiguiente, β = 35º30'.

2.– Cuando el valor de la función trigonométrica no figura en la tabla:
Este caso lo explicaremos con un ejemplo:
Si cos γ = 0.8518
Hallar el ángulo γ

Buscamos en la tabla los dos valores que más se aproximen a 0.8518, uno por exceso y el otro por defecto. En este caso encontramos:
0.8526 que corresponde a cos 31º30' y
0.8511 que corresponde a cos 31º40'.

Si restamos ambos valores hallaremos una diferencia que denominaremos 1a. diferencia:

$$\begin{array}{r} \cos 31^o30' = 0.8526 \\ \cos 31^o40' = 0.8511 \\ \hline 10' = 0.0015 \end{array}$$

Ahora, al valor que tomamos por exceso, le restamos el coseno del ángulo requerido y al resultado le llamaremos 2a. diferencia:

$$\begin{array}{r} \cos 31^o30' = 0.8526 \\ \cos \gamma = 0.8518 \\ \hline x = 0.0008 \end{array}$$

Estableciendo la proporción:

$$\begin{array}{lcl} 0.0015 & \text{———} & 10' \\ 0.0008 & \text{———} & x \end{array}$$

$$x = \frac{0.0008 \cdot 10}{0.0015} = \frac{0.0080}{0.0015}$$

$x = 5.33'$

Como no podemos tener una fracción de minuto expresada en decimales, debemos convertirla a segundos:

$5.33' = 5' + 0.33'$

$$\begin{array}{lcl} 1' & \text{———} & 60'' \\ 0.33' & \text{———} & y \end{array}$$

$y = 0.33 \cdot 60$
$y = 19.8''$
$y \cong 20''$

Entonces: $x = 5' + 20''$
$x = 5'20''$

El siguiente paso consiste en sumar al ángulo correspondiente el valor del coseno que tomamos por exceso, el valor de x:

$\gamma = 31^o30' + x$
$\gamma = 31^o30' \quad 5'20''$
$\gamma = 31^o35'20''$

Nótese que en este caso hemos sumado el valor de x, ya que, al aumentar el ángulo, el coseno disminuye. Lo mismo ocurre para la cotangente y la cosecante.

Por el contrario, para el seno, la tangente y la secante, el valor de x se resta porque estas funciones trigonométricas aumentan cuando el ángulo aumenta.

TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Grados	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	
0° 0'	.0000		.0000		1.000	1.0000	**90° 0'**
10'	029	343.8	029	343.8	000	000	50'
20'	058	171.9	058	171.9	000	000	40'
30'	.0087	114.6	.0087	114.6	1.000	1.0000	30'
40'	116	85.95	116	85.94	000	0.9999	20'
50'	145	68.76	145	68.75	000	999	10'
1° 0'	.0175	57.30	.0175	57.29	1.000	.9998	**89° 0'**
10'	204	49.11	204	49.10	000	998	50'
20'	233	42.98	233	42.96	000	997	40'
30'	.0262	38.20	.0262	38.19	1.000	.9997	30'
40'	291	34.38	291	34.37	000	996	20'
50'	320	31.26	320	31.24	001	995	10'
2° 0'	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	**88° 0'**
10'	378	26.45	378	26.43	001	993	50'
20'	407	24.56	407	24.54	001	992	40'
30'	.0436	22.93	.0437	22.90	1.001	.9990	30'
40'	465	21.49	466	21.47	001	989	20'
50'	494	20.23	495	20.21	001	988	10'
3° 0'	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	**87° 0'**
10'	552	18.10	553	18.07	002	985	50'
20'	581	17.20	582	17.17	002	983	40'
30'	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981	30'
40'	640	15.64	641	15.60	002	980	20'
50'	669	14.96	670	14.92	002	978	10'
4° 0'	.0698	14.34	.0699	14.30	1.002	.9976	**86° 0'**
10'	727	13.76	729	13.73	003	974	50'
20'	756	13.23	758	13.20	003	971	40'
30'	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969	30'
40'	814	12.29	816	12.25	003	967	20'
50'	843	11.87	846	11.83	004	964	10'
5° 0'	.0872	11.47	.0875	11.43	1.004	.9962	**85° 0'**
10'	901	11.10	904	11.06	004	959	50'
20'	929	10.76	934	10.71	004	957	40'
30'	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954	30'
40'	.0987	10.13	.0992	10.08	005	951	20'
50'	.1016	9.839	.1022	9.788	005	948	10'
6° 0'	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	**84° 0'**
10'	074	9.309	080	9.255	006	942	50'
20'	103	9.065	110	9.010	006	939	40'
30'	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936	30'
40'	161	8.614	169	8.556	007	932	20'
50'	190	8.405	198	8.345	007	929	10'
7° 0'	.1219	8.206	.1228	8.144	1.008	.9925	**83° 0'**
10'	248	8.016	257	7.953	008	922	50'
20'	276	7.834	287	7.770	008	918	40'
30'	.1305	7.661	.1317	7.596	1.009	.9914	30'
40'	334	7.496	346	7.429	009	911	20'
50'	363	7.337	376	7.269	009	907	10'
8° 0'	.1392	7.185	.1405	7.115	1.010	.9903	**82° 0'**
10'	421	7.040	435	6.968	010	899	50'
20'	449	6.900	465	6.827	011	894	40'
30'	.1478	6.765	.1495	6.691	1.011	.9890	30'
40'	507	6.636	524	6.561	012	886	20'
50'	536	6.512	554	6.435	012	881	10'
9° 0'	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	**81° 0'**
	Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados

TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Grados	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	
9° 0′	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	81° 0′
10′	593	277	614	197	013	872	50′
20′	622	166	644	6.084	013	868	40′
30′	.1650	6.059	.1673	5.976	1.014	.9863	30′
40′	679	5.955	703	871	014	858	20′
50′	708	855	733	769	015	853	10′
10° 0′	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	80° 0′
10′	765	665	793	576	016	843	50′
20′	794	575	823	485	016	838	40′
30′	.1822	5.487	.1853	5.396	1.017	.9833	30′
40′	851	403	883	309	018	827	20′
50′	880	320	914	226	018	822	10′
11° 0′	.1908	5.241	.1944	5.145	1.019	.9816	79° 0′
10′	937	164	.1974	5.066	019	811	50′
20′	965	089	.2004	4.989	020	805	40′
30′	.1994	5.016	.2035	4.915	1.020	.9799	30′
40′	.2022	4.945	065	843	021	793	20′
50′	051	876	095	773	022	787	10′
12° 0′	.2079	4.810	.2126	4.705	1.022	.9781	78° 0′
10′	108	745	156	638	023	775	50′
20′	136	682	186	574	024	769	40′
30′	.2164	4.620	.2217	4.511	1.024	.9763	30′
40′	193	560	247	449	025	757	20′
50′	221	502	278	390	026	750	10′
13° 0′	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	77° 0′
10′	278	390	339	275	027	737	50′
20′	306	336	370	219	028	730	40′
30′	.2334	4.284	.2401	4.165	1.028	.9724	30′
40′	363	232	432	113	029	717	20′
50′	391	182	462	061	030	710	10′
14° 0′	.2419	4.134	.2493	4.011	1.031	.9703	76° 0′
10′	447	086	524	3.962	031	696	50′
20′	476	4.039	555	914	032	689	40′
30′	.2504	3.994	.2586	3.867	1.033	.9681	30′
40′	532	950	617	821	034	674	20′
50′	560	906	648	776	034	667	10′
15° 0′	.2588	3.864	.2679	3.732	1.035	.9659	75° 0′
10′	616	822	711	689	036	652	50′
20′	644	782	742	647	037	644	40′
30′	.2672	3.742	.2773	3.606	1.038	.9636	30′
40′	700	703	805	566	039	628	20′
50′	728	665	836	526	039	621	10′
16° 0′	.2756	3.628	.2867	3.487	1.040	.9613	74° 0′
10′	784	592	899	450	041	605	50′
20′	812	556	931	412	042	596	40′
30′	.2840	3.521	.2962	3.376	1.043	.9588	30′
40′	868	487	.2994	340	044	580	20′
50′	896	453	.3026	305	045	572	10′
17° 0′	.2924	3.420	.3057	3.271	1.046	.9563	73° 0′
10′	952	388	089	237	047	555	50′
20′	.2979	357	121	204	048	546	40′
30′	.3007	3.326	.3153	3.172	1.048	.9537	30′
40′	035	295	185	140	049	528	20′
50′	062	265	217	108	050	520	10′
18° 0′	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	72° 0′
	Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados

TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Grados	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	
18° 0′	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	72° 0′
10′	118	207	281	047	052	502	50′
20′	145	179	314	3.018	053	492	40′
30′	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483	30′
40′	201	124	378	960	056	474	20′
50′	228	098	411	932	057	465	10′
19° 0′	.3256	3.072	.3443	2.904	1.058	.9455	71° 0′
10′	283	046	476	877	059	446	50′
20′	311	3.021	508	850	060	436	40′
30′	.3338	2.996	.3541	2.824	1.061	.9426	30′
40′	365	971	574	798	062	417	20′
50′	393	947	607	773	063	407	10′
20° 0′	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	70° 0′
10′	448	901	673	723	065	387	50′
20′	475	878	706	699	066	377	40′
30′	.3502	2.855	.3739	2.675	1.068	.9367	30′
40′	529	833	772	651	069	356	20′
50′	557	812	805	628	070	346	10′
21° 0′	.3584	2.790	.3839	2.605	1.071	.9336	69° 0′
10′	611	769	872	583	072	325	50′
20′	638	749	906	560	074	315	40′
30′	.3665	2.729	.3939	2.539	1.075	.9304	30′
40′	692	709	.3973	517	076	293	20′
50′	719	689	.4006	496	077	283	10′
22° 0′	.3746	2.669	.4040	2.475	1.079	.9272	68° 0′
10′	773	650	074	455	080	261	50′
20′	800	632	108	434	081	250	40′
30′	.3827	2.613	.4142	2.414	1.082	.9239	30′
40′	854	595	176	394	084	228	20′
50′	881	577	210	375	085	216	10′
23° 0′	.3907	2.559	.4245	2.356	1.086	.9205	67° 0′
10′	934	542	279	337	088	194	50′
20′	961	525	314	318	089	182	40′
30′	.3987	2.508	.4348	2.300	1.090	.9171	30′
40′	.4014	491	383	282	092	159	20′
50′	041	475	417	264	093	147	10′
24° 0′	.4067	2.459	.4452	2.246	1.095	.9135	66° 0′
10′	094	443	487	229	090	124	50′
20′	120	427	522	211	097	112	40′
30′	.4147	2.411	.4557	2.194	1.099	.9100	30′
40′	173	396	592	177	100	088	20′
50′	200	381	628	161	102	075	10′
25° 0′	.4226	2.366	.4663	2.145	1.103	.9063	65° 0′
10′	253	352	699	128	105	051	50′
20′	279	337	734	112	106	038	40′
30′	.4305	2.323	.4770	2.097	1.108	.9026	30′
40′	331	309	806	081	109	013	20′
50′	358	295	841	066	111	.9001	10′
26° 0′	.4384	2.281	.4877	2.050	1.113	.8988	64° 0′
10′	410	268	913	035	114	975	50′
20′	436	254	950	020	116	962	40′
30′	.4462	2.241	.4986	2.006	1.117	.8949	30′
40′	488	228	.5022	1.991	119	936	20′
50′	514	215	059	977	121	923	10′
27° 0′	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	63° 0′
	Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados

TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Grados	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	
27° 0′	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	63° 0′
10′	566	190	132	949	124	897	50′
20′	592	178	169	935	126	884	40′
30′	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870	30′
40′	643	154	243	907	129	857	20′
50′	669	142	280	894	131	843	10′
28° 0′	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	62° 0′
10′	720	118	354	868	134	816	50′
20′	746	107	392	855	136	802	40′
30′	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788	30′
40′	797	085	467	829	140	774	20′
50′	823	074	505	816	142	760	10′
29° 0′	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	61° 0′
10′	874	052	581	792	145	732	50′
20′	899	041	619	780	147	718	40′
30′	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704	30′
40′	950	020	696	756	151	689	20′
50′	.4975	010	735	744	153	675	10′
30° 0′	.5000	2.000	.5774	1.732	1.155	.8660	60° 0′
10′	025	1.990	812	720	157	646	50′
20′	050	980	851	709	159	631	40′
30′	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616	30′
40′	100	961	930	686	163	601	20′
50′	125	951	.5969	675	165	587	10′
31° 0′	.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	59° 0′
10′	175	932	048	653	169	557	50′
20′	200	923	088	643	171	542	40′
30′	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526	30′
40′	250	905	168	621	175	511	20′
50′	275	896	208	611	177	496	10′
32° 0′	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	58° 0′
10′	324	878	289	590	181	465	50′
20′	348	870	330	580	184	450	40′
30′	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434	30′
40′	398	853	412	560	188	418	20′
50′	422	844	453	550	190	403	10′
33° 0′	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	57° 0′
10′	471	828	536	530	195	371	50′
20′	495	820	577	520	197	355	40′
30′	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339	30′
40′	544	804	661	501	202	323	20′
50′	568	796	703	1.492	204	307	10′
34° 0′	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	56° 0′
10′	616	781	787	473	209	274	50′
20′	640	773	830	464	211	258	40′
30′	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	30′
40′	688	758	916	446	216	225	20′
50′	712	751	.6959	437	218	208	10′
35° 0′	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	55° 0′
10′	760	736	046	419	223	175	50′
20′	783	729	089	411	226	158	40′
30′	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	30′
40′	831	715	177	393	231	124	20′
50′	854	708	221	385	233	107	10′
36° 0′	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	54° 0′
	Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados

TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Grados	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	
36° 0'	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	54° 0'
10'	901	695	310	368	239	073	50'
20'	925	688	355	360	241	056	40'
30'	.5948	1.681	.7400	1.351	1.244	.8039	30'
40'	972	675	445	343	247	021	20'
50'	.5995	668	490	335	249	.8004	10'
37° 0'	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	53° 0'
10'	041	655	581	319	255	969	50'
20'	065	649	627	311	258	951	40'
30'	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934	30'
40'	111	636	720	295	263	916	20'
50'	134	630	766	288	266	898	10'
38° 0'	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	52° 0'
10'	180	618	860	272	272	862	50'
20'	202	612	907	265	275	844	40'
30'	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7826	30'
40'	248	601	.8002	250	281	808	20'
50'	271	595	050	242	284	790	10'
39° 0'	.6293	1.589	.8098	1.235	1.287	.7771	51° 0'
10'	316	583	146	228	290	753	50'
20'	338	578	195	220	293	735	40'
30'	.6361	1.572	.8243	1.213	1.296	.7716	30'
40'	383	567	292	206	299	698	20'
50'	406	561	342	199	302	679	10'
40° 0'	.6428	1.556	.8391	1.192	1.305	.7660	50° 0'
10'	450	550	441	185	309	642	50'
20'	472	545	491	178	312	623	40'
30'	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604	30'
10'	517	535	591	164	318	585	20'
50'	539	529	642	157	322	566	10'
41° 0'	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	49° 0'
10'	583	519	744	144	328	528	50'
20'	604	514	796	137	332	509	40'
30'	.6626	1.509	.8847	1.130	1.335	.7490	30'
40'	648	504	899	124	339	470	20'
50'	670	499	.8952	117	342	451	10'
42° 0'	.6691	1.494	.9004	1.111	1.346	.7431	48° 0'
10'	713	490	057	104	349	412	50'
20'	734	485	110	098	353	392	40'
30'	.6756	1.480	.9163	1.091	1.356	.7373	30
40'	777	476	217	085	360	353	20'
50'	799	471	271	079	364	333	10'
43° 0'	.6820	1.466	.9325	1.072	1.367	.7314	47° 0'
10'	841	462	380	066	371	294	50'
20'	862	457	435	060	375	274	40'
30'	.6884	1.453	.9490	1.054	1.379	.7254	30'
40'	905	448	545	048	382	234	20'
50'	926	444	601	042	386	214	10'
44° 0'	.6947	1.440	.9657	1.036	1.390	.7193	46° 0'
10'	967	435	713	030	394	173	50'
20'	.6988	431	770	024	398	153	40'
30'	.7009	1.427	.9827	1.018	1.402	.7133	30'
40'	030	423	884	012	406	112	20'
50'	050	418	.9942	006	410	092	10'
45° 0'	.7071	1.414	1.000	1.000	1.414	.7071	45° 0'
	Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados

3) SISTEMA METRICO

El Sistema internacional de unidades (sistema S.I.) es el nombre dado por la II Conferencia general de pesas y medidas al antiguo sistema métrico. Se trata de una versión modernizada del sistema métrico creado durante la Revolución Francesa, establecida mediante acuerdos internacionales al objeto de fijar relaciones mutuas y lógicas entre todas las mediciones efectuadas por la ciencia, la industria y el comercio. En la actualidad, el 80o/o de todos los países del mundo se valen del sistema S.I., mientras que aquellos que aún usan el sistema británico (pies, libras) se disponen a adoptar el sistema internacional.

Las siete unidades básicas que se definen más adelante constituyen los cimientos del sistema, y todas las demás se derivan de ellas. Las unidades derivadas son múltiplos o submúltiplos de las fundamentales. Cada una vale diez de las inmediatamente inferiores. Los múltiplos se forman anteponiendo al nombre de la unidad fundamental las voces griegas: **deca**, que significa 10; **hecto**, 100; **kilo**, 1000; **miria** 10,000; **mega** 1'000,000; **giga**, 1,000'000,000 y **tera** 1'000,000'000,000. Los submúltiplos se forman anteponiendo las voces latinas; **deci** que significa décima; **centi**, centésima; y **mili**, milésima. Hoy se emplean también las partículas **micro** (millonésima = 10^{-6}), **nano** (milmillonésima = 10^{-9}), **pico** (billonésima = 10^{-12}), **femto** (mil-billonésima = 10^{-15}) y **atto** (trillonésima = 10^{-18}).

Medidas de longitud

1 miriámetro	(Mm.)	=	10,000	metros
1 kilómetro	(Km.)	=	1,000	"
1 hectómetro	(Hm.)	=	100	"
1 decámetro	(Dm.)	=	10	"
1 METRO	(m.)	=	1	"
1 decímetro	(dm.)	=	0.1	"
1 centímetro	(cm.)	=	0.01	"
1 milímetro	(mm.)	=	0.001	"
1 micra (o micrón, o micromilímetro)		=	0.000 001" = 0,001 mm.	
1 milimicra (o milimicrón)			0.000 000 001 " = 0.001 micra	
1 angstrom (A.)		=	0.000 000 1 mm.	
		=	0. 000 1 micra	
		=	0. 1 milimicra	

Medidas de superficie

La medida fundamental de superficie es el metro cuadrado

1 miriámetro cuadrado (Mm^2)	=	100'000,000 m^2
1 kilómetro cuadrado (km^2)	=	1'000,000 m^2
1 hectárea (Ha.) o hectómetro cuadrado (hm^2)	=	10,000 m^2
1 área (a.) o decámetro cuadrado (Dm^2)	=	100 m^2
1 METRO CUADRADO (m^2)	=	1 m^2
1 decímetro cuadrado (dm^2)	=	0.01 m^2
1 centímetro cuadrado (cm^2)	=	0.000 1 m^2
1 milímetro cuadrado (mm^2)	=	0.000 001 m^2

Medidas de volumen

La medida fundamental de volumen es el metro cúbico

1 kilómetro cúbico (km^3)	= 1.000.000.000 m^3
1 hectómetro cúbico (hm^3)	= 1.000.000 m^3
1 decámetro cúbico (Dm^3)	= 1.000 m^3
1 METRO CUBICO (m^3)	
1 decímetro cúbico (dm^3)	= 0,001 m^3
1 centímetro cúbico (cm^3)	= 0,000 001 m^3
1 milímetro cúbico (mm^3)	= 0, 000 000 001 m^3

Medidas de capacidad

El litro es el volumen que ocupa un kilogramo de agua pura a 4ºC de temperatura, a nivel del mar. Es casi igual a un decímetro cúbico.

1 kilolitro (kl)	= 1000 litros	= 1 m^3
1 hectolitro (hl)	= 100 "	
1 decalitro (Dl)	= 10 "	
1 LITRO (l)	= 1 "	= 1 dm^3
1 decilitro (dl)	= 0,1 "	
1 centilitro (cl)	= 0,01 "	
1 mililitro (ml)	= 0,001 "	

Medidas de peso

1 tonelada métrica (T)	= 1000 kg.		
1 quintal métrico (q)	= 100 kg.		
1 miriagramo (Mg)	= 10 kg.		
1 kilogramo (kg)	= 1 kg.	= 1000	g.
1 hectogramo (hg)		= 100	g.
1 decagramo (Dg)		= 10	g.
1 GRAMO (g)		= 1	g.
1 decigramo (dg)		= 0,1	g.
1 centigramo (cg)		= 0,01	g.
1 miligramo (mg)		= 0,001	g.
1 quilate métrico	200 mg.	= 0,2	g.

Longitud-Metro. El metro es igual a 1'650,763.73 veces la longitud de onda, en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2P_{10}$ y 5 d_5 del átomo de kriptón 86, según resolucion de la XI Conferencia general de pesas y medidas, París, oct., 1960.

Masa - Kilogramo. El patrón del kilogramo es un cilindro de platino e iridio que se conserva en la Oficina internacional de pesas y medidas en París. El kilogramo es la única unidad básica que aún se define mediante un objeto confeccionado a este efecto.

Tiempo - Segundo. Según la XIII Conferencia general de pesas y medidas, el segundo es la duración de 9,192'631,770 períodos de radiación emitida por un átomo de cesio 133 durante la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental. El segundo puede definirse también como la 86,400ava parte del día solar medio.

Temperatura - Kelvin. El kelvin (antes llamado "grado kelvin") fue definido por la XIII Conferencia general de pesas y medidas como el equivalente de la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua. El punto triple es aquel en el que el agua se manifiesta simultáneamente en los estados sólido, líquido y gaseoso, y corresponde a 0.01 grados en la escala Celsius o centígrada.

Intensidad de corriente eléctrica - Amperio. Un amperio es la intensidad de una corriente continua que, mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno del otro en el vacío, produciría entre ambos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por metro de longitud. (El **newton** es la fuerza que comunica a un cuerpo que tiene una masa de un kilogramo, una aceleración de un metro por segundo cada segundo.)

Intensidad luminosa - Candela o bujía nueva. Esta nueva unidad es tal que la luminosidad del cuerpo negro a la temperatura de solidificación del platino es de 60 candelas por centímetro cuadrado.

Cantidad de substancia - Mol. El mol se define como la cantidad de substancia que contiene tantas unidades elementales (átomos, iones, electrones, fotones, etc.) como átomos de carbono se encuentran en 0,012 kilogramos de carbono 12.

FACTORES DE CONVERSION

Para convertir	en	multiplíquese por
acres	hectáreas	0,4047
acres	metros^2	4046,9
acres-pies	metros^3	1223,5315
atmósferas	cm. de merc.	76,0
atmósferas	kg. por cm^2	1,0333
barriles	metros^3	0,11923
bushels	hectolitros	0,3524
bushels	metros^3	0,03524
caballos de fuerza (metr.)	caballos de fuerza (ing.)	0,9863
caballos de fuerza (ing.)	caballos de fuerza (metr.)	1,014
cab. de f. (ing.)	kg-calorías por min.	10,68
cab. de f. (ing.)	kilovatios	0,7457
centilitros	onzas fl. (EU)	0,3382
centilitros	pulgadas^3	0,6103
centímetros	pulgadas	0,3937
cm. de mercurio	atmósferas	0,01316
cm. de mercurio	kg. por m^2	136,0
cmts. por seg.	pies por seg.	0,03281
cm. cuadrados	pulg. cuadr.	0,1550
cm. cúbicos	pulg. cúb.	0,0610
dracmas	cmts^3	3,6967
emes, picas	milímetros	4,233
ergios	gramos-calorías	0,000000024
galones (Ing.)	litros	4,5459
galones (EU)	litros	3,7853
galones (EU)	metros^3	0,003785
galones por min.	litros por seg.	0,06308
grados	segundos	3600,0
gramos	granos	15,4224
gramos	onzas	0,0353
gramos por cm^2	libras por pie^2	2,0481
gramos por cm^3	libras por pie^3	62,43
gramos por litro	libras por pie^3	0,062427
gramos-calorías	libras-pies	3,0880
granos	gramos	0,0648
hectáreas	acres	2,4710
hectolitros	bushels	2,8378
kilogramos	libras (av.)	2,2046
kilogramos	libras troy	2,6792
kilogramos por cm^2	atmósferas	0,9678
kilogramos por cm^2	lbs. por pulg.^{2}	14,22
kilómetros	millas	0,6214
kilómetros	millas náut.	0,5396
kilómetros^2	millas^2	0,3861
km. por hora	cm. por seg.	27,78
km. por hora	pies por seg.	0,9113
kilovatios	cab. de f. (ing.)	1,341
libras (av.)	kilogramos	0,4536

Para convertir	en	multiplíquese por
libras troy	kilogramos	0,3732
litros	galones amer	0,2642
litros	pintas (áridos)	1,8162
litros	pintas (líq.)	2,1134
litros	quarts (áridos)	0,9081
litros	quarts (líq.)	1,0567
metros	pies	3,2808
metros	yardas	1,0936
metros cuadrados	pies cuadr.	10,7639
metros cuadrados	yardas cuadr.	1,1960
metros cúbicos	pies cúbicos	35,3145
metros cúbicos	yardas cúbicas	1,3079
metros^3	bushels (áridos)	28,38
metros^3	gals. (EU)	264,2
metros por seg.	pies por seg.	3,281
milímetros	pulgadas	0,0394
millas	kilómetros	1,6093
millas (náuticas)	kilómetros	1,853
millas por hora	cmts. por seg.	44,70
millas por hora	kmts. por min.	0,02682
millas^2	kilómetros^2	2,590
minutos (ángulo)	grados	0,01667
nudos	kmts. por hora	1,8532
onzas	gramos	28,3495
pecs (Ingl.)	litros	9,091901
pecs (EU)	litros	8,809582
pies	metros	0,3048
pies cuadrados	metros cuadr.	0,0929
pies cúbicos	metros cúb.	0,0283
pies^3	litros	28,32
pies^3 por min.	l por seg.	0,4730
pies por seg.	km. por hora	1,097
pies por seg.	m. por min.	18,29
pulgadas	milímetros	25,4001
pulgadas	centímetros	2,5400
pulgadas cuadradas	cm. cuadr.	6,4516
pulgadas cúbicas	cm. cúb.	16,3872
pulg.^{3}	centilitros	1,639
pintas (áridos)	litros	0,5506
pintas (áridos)	cm^3	550,704
pintas (líq.)	litros	0,4732
rods	metros	5,029
tons. (cortas)	tons. (métr.)	0,9078
tons. (largas)	tons (métr.)	1,016
tons. métricas	tons. cortas	1,1023
tons. métricas	tons. largas	0,9842
yardas	metros	0,9144
yardas cuadradas	metros cuadr.	0,8361
yardas cúbicas	metros cúb.	0,7646
yardas^3	litros	764,6
yardas^3 por min	lit. por seg.	12,74

TABLAS DE CONVERSIONES

Para convertir una medida a otra busque la cantidad que desea reducir en la columna central. El equivalente de tal cifra en la medida que desee aparece en la columna de la derecha o de la izquierda según la medida que busque.

Pies... Metros

Para convertir pies a metros multiplíquese por 0,3048
Para convertir metros a pies multiplíquese por 3,2808

metros	X	pies	metros	X	pies
0,305	1	3,281	4,572	15	49,212
0,610	2	6,562	6,096	20	65,616
0,915	3	9,843	9,144	30	98,424
1,220	4	13,124	12,192	40	131,232
1,524	5	16,404	15,240	50	160,040
1,829	6	19,685	18,288	60	196,848
2,134	7	22,966	21,336	70	229,656
2,439	8	26,247	24,384	80	262,464
2,744	9	29,528	27,432	90	295,272
3,048	10	32,808	30,480	100	328,080

Yardas... Metros

Para convertir yardas a metros multiplíquese por 0,9144
Para convertir metros a yardas multiplíquese por 1,0936

m.	X	yd.	m.	X	yd.
0,914	1	1,094	13,716	15	16,404
1,824	2	2,187	18,288	20	21,872
2,748	3	3,281	27,432	30	32,808
3,658	4	4,374	36,808	40	43,744
4,572	5	5,468	45,720	50	54,680
5,486	6	6,562	54,864	60	65,616
6,401	7	7,655	64,008	70	76,552
7,315	8	8,749	73,152	80	87,488
8,230	9	9,843	82,296	90	98,424
9,144	10	10,936	91,440	100	109,360

Pulgadas... Centímetros

Para convertir pulgadas a centímetros multiplíquese por 2,54
Para convertir centímetros a pulgadas multiplíquese por 0,3937

cm.	X	pul.	cm.	X	pul.
2,54	1	0,394	38,10	15	5,906
5,08	2	0,788	50,80	20	7,874
7,62	3	1,182	76,20	30	11,811
10,16	4	1,575	101,60	40	15,748
12,70	5	1,969	127,00	50	19,685
15,24	6	2,363	152,40	60	23,622
17,78	7	2,756	177,80	70	27,559
20,32	8	3,150	203,60	80	31,496
22,86	9	3,544	228,60	90	35,433
25,40	10	3,937	254,00	100	39,370

Kilómetros... Millas

Para convertir kilómetros a millas multiplíquese por 0,6214
Para convertir millas a kilómetros multiplíquese por 1,6093

mi.	X	km.	mi.	X	km.
0,621	1	1,609	9,321	15	24,140
1,243	2	3,219	12,428	20	32,186
1,865	3	4,828	18,642	30	48,279
2,486	4	6,437	24,856	40	64,372
3,107	5	8,047	31,070	50	80,465
3,729	6	9,656	37,284	60	96,558
4,350	7	11,265	43,498	70	112,651
4,972	8	12,874	49,712	80	128,744
5,593	9	14,484	55,926	90	144,837
6,214	10	16,093	62,140	100	160,930

Pulgadas² . . . Centímetros²

Para convertir pulgadas² a centímetros² multiplíquese por 6,4516
Para convertir centímetros² a pulgadas² multiplíquese por 0,1550

cm²	X	pul.²	cm.²	X	pul.²
6,452	1	0,155	96,774	15	2,325
12,903	2	0,310	129,032	20	3,100
19,355	3	0,465	193,548	30	4,650
25,806	4	0,620	258,064	40	6,200
32,258	5	0,775	322,580	50	7,750
38,710	6	0,930	387,096	60	9,300
45,161	7	1,085	451,612	70	10,850
51,613	8	1,240	516,128	80	12,400
58,064	9	1,395	580,644	90	13,950
64,516	10	1,550	645,160	100	15,500

4) CUADRADOS Y CUBOS DE LOS NUMEROS DEL 1 AL 100

	Cuadrado	Cubo
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	24	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1,000
11	121	1,331
12	144	1,728
13	169	2,197
14	196	2,744
15	225	3,375
16	256	4,096
17	289	4,913
18	324	5,832
19	361	6,859
20	400	8,000
21	441	9,261
22	484	10,648
23	529	12,167
24	576	13,824
25	625	15,625
26	676	17,576
27	729	19,683
28	784	21,952
29	841	24,389
30	900	27,000
31	961	29,791
32	1,024	32,768
33	1,089	35,937
34	1,156	39,304
35	1,225	42,875
36	1,296	46,656
37	1,369	50,653
38	1,444	54,872
39	1,521	59,319
40	1,600	64,000
41	1,681	68,921
42	1,764	74,088
43	1,849	79,507
44	1,936	85,184
45	2,025	91,125
46	2,116	97,336
47	2,209	103,823
48	2,304	110,592
49	2,401	117,649
50	2,500	125,000
51	2,601	132,651
52	2,704	140,608
53	2,809	148,877
54	2,916	157,464
55	3,025	166,375
56	3,136	175,616
57	3,249	185,193
58	3,364	195,112
59	3,481	205,379
60	3,600	216,000
61	3,721	226,981
62	3,844	238,328
63	3,969	250,047
64	4,096	262,144
65	4,225	274,625
66	4,356	287,496
67	4,489	300,763
68	4,624	314,432
69	4,761	328,509
70	4,900	343,000
71	5,041	357,911
72	5,184	373,248
73	5,329	389,017
74	5,476	405,224
75	4,625	421,875
76	5,776	438,976
77	5,929	456,533
78	6,084	474,552
79	6,241	493,039
80	6,400	512,000
81	6,561	531,441
82	6,724	551,368
83	6,889	571,787
84	7,056	592,704
85	7,225	614,125
86	7,396	636,056
87	7,569	658,503
88	7,744	681,472
89	7,921	704,969
90	8,100	729,000
91	8,281	753,571
92	8,464	778,688
93	8,649	804,357
94	8,836	830,584
95	9,025	857,375
96	9,216	884,736
97	9,409	912,673
98	9,604	941,192
99	9,801	970,299
100	10,000	1'000,000

5) RAICES CUADRADAS Y CUBICAS DE LOS NUMEROS DEL 1 AL 100

	Raíz cuadrada	Raíz cúbica		Raíz cuadrada	Raíz cúbica		Raíz cuadrada	Raíz cúbica
1	1.000 000	1.000 000	35	5.916 080	3.271 066	69	8.306.624	4.101.566
2	1.414 214	1.259 921	36	6.000 000	3.301 927	70	8.366 600	4.121 285
3	1.732 051	1.442 250	37	6.082 763	3.332 222	71	8.426 150	4.140 818
4	2.000 000	1.587 401	38	6.164 414	3.361 975	72	8.845.281	4.160 168
5	2.236 068	1.709 976	39	6.244 998	3.391 211	73	8.544 004	4.179 339
6	2.449 490	1.817 121	40	6.324 555	3.419 952	74	8.602 325	4.198 336
7	2.645 751	1.912.931	41	6.403 124	3.448 217	75	8.660 254	4.217 163
8	2.828 427	2.000 000	42	6.480 741	3.476 027	76	8.717 798	4.235 824
9	3.000 000	2.080 084	43	6.557 439	3.503 398	77	8.774 964	4.254 321
10	3.162 278	2.154 435	44	6.633 250	3.530 348	78	8.831 761	4.272 659
11	3.316 625	2.223.980	45	6.708 204	3.556 893	79	8.888 194	4.290 840
12	3.464 102	2.289 428	46	6.782 330	3.583 048	80	8.944 272	4.308 869
13	3.605 551	2.351 335	47	6.855 655	3.608 826	81	9.000 000	4.326 749
14	3.741 657	2.410 142	48	6.928 203	3.634 241	82	9.055 385	4.344 481
15	3.872 983	2.466 212	49	7.000 000	3.659 306	83	9.110 434	4.362 071
16	4.000 000	2.519 842	50	7.071 068	3.684 031	84	9.165 151	4.379 519
17	4.123 106	2.571 282	51	7.141 428	3.708 430	85	9.219 544	4.395 830
18	4.242 641	2.620 741	52	7.211 103	3.732 511	86	9.273 618	4.414 005
19	4.358 899	2.668 402	53	7.280 110	3.756 286	87	9.327 379	4.431 048
20	4.472 136	2.714 418	54	7.348 469	3.779 763	88	9.380 832	4.447 960
21	4.582 576	2.758 924	55	7.416 198	3.802 952	89	9.433 981	4.464 745
22	4.690 416	2.802 039	56	7.483 315	3.825 862	90	9.486 833	4.481 405
23	4.795 832	2.843 867	57	7.549 834	3.848 501	91	9.539 392	4.497 941
24	4.898 979	2.884 499	58	7.615 773	3.870 877	92	9.591 663	4.514 357
25	5.000 000	2.924 018	59	7.681 146	3.892 996	93	9.643 651	4.530 655
26	5.099 020	2.962 496	60	7.745 967	3.914 868	94	9.695 360	4.546 836
27	5.196 152	3.000 000	61	7.810 250	3.936 497	95	9.746 794	4.562 903
28	5.291 503	3.036 589	62	7.874 008	3.957 892	96	9.797 959	4.578 857
29	5.385 165	3.072 317	63	7.937 254	3.979 057	97	9.848 858	4.594 701
30	5.477 226	3.107 233	64	8.000 000	4.000 000	98	9.899 495	4.610 436
31	5.567 764	3.141 381	65	8.062 258	4.020 726	99	9.949 874	4.626 065
32	5.656 854	3.174 802	66	8.124 038	4.041 240	100	10.000 000	4.641 589
33	5.744 563	3.207 534	67	8.185 353	4.061 548			
34	5.830 952	3.239 612	68	8.246 211	4.081 655			

6) NUMEROS PRIMOS DEL 1 AL 1000

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	487	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	(1009)

7) NUMEROS ROMANOS Y ARABIGOS

I	1	IX	9	XVII	17	LXX	70	DC	600
II	2	X	10	XVIII	18	LXXX	80	DCC	700
III	3	XI	11	XIX	19	XC	90	DCCC	800
IV	4	XII	12	XX	20	C	100	CM	900
V	5	XIII	13	XXX	30	CC	200	M	1000
VI	6	XIV	14	XL	.40	CCC	300	MM	2000
VII	7	XV	15	L	50	CD	400	$\overline{V}$	5000
VIII	8	XVI	16	LX	60	D	500	$\overline{X}$	10000

NOTA: Una línea sobre un número (letra) multiplica su valor por 1,000 por ejemplo: $\overline{X}$ = 10,000; $\overline{L}$ = 50,000; $\overline{C}$ = 100,000; $\overline{D}$ = 500,000; $\overline{M}$ = 1.000,000; $\overline{CLIX}$ = 159,000; $\overline{DLIX}$ = 559,000.

Otras reglas generales para los números romanos son las siguientes: (1) Una letra repetida significa repetir su valor: XX = 20; CCC = 300; (2) una letra colocada después de un valor superior añade su propio valor; VI = 6; DC =600; (3) una letra colocada antes de un valor mayor resta su propio valor: IV= 4.

8) AREAS Y VOLUMENES

Figura	Nombre	Claves	Perímetro	Area
	TRIANGULO	a, b, c = lados h = altura s = semiperímetro	$P = a + b + c$	$A = \frac{bh}{2} \cdot s = \frac{a + b + c}{2}$
	TRIANGULO RECTANGULO	a, b = lados menores (catetos) c = lado mayor (hipotenusa)	$P = a + b + c$	$A = \frac{ab}{2}$
	CUADRADO	a = lado	$P = 4a$	$A = a^2$
	RECTANGULO	a = altura b = base	$P = 2(a + b)$	$A = ba$

Figura	Nombre	Claves	Perímetro	Area
	ROMBO	a = lado d_1, d_2 = diagonales	$P = 4a$	$A = \frac{d_1 d_2}{2}$
	PARALELOGRAMO CUALQUIERA	a, b = lados h = altura	$P = 2(a + b)$	$A = bh$
	TRAPECIO	a, b, c, d = lados a, c = lados paralelos h = altura	$P = a + b + c + d$	$A = \left(\frac{a + c}{2}\right) h$
	TRAPEZOIDE O CUADRILATERO CUALQUIERA	a, b, c, d = lados d_1, d_2 = diagonales	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{1}{2}\sqrt{4(d_1 d_2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$

Figura	Nombre	Claves	Area	Volumen
	TETRAEDRO	a = arista	$A = 1.7321\ a^2$	$V = 0.1178\ a^3$
	EXAEDRO	a = arista	$A = 6a^2$	$V = a^3$
	OCTAEDRO	a = arista	$A = 3.4642\ a^2$	$V = 0.4714\ a^3$
	DODECAEDRO	a = arista	$A = 20.6457\ a^2$	$V = 7.6631\ a^3$

Figura	Nombre	Claves	Area	Volumen
	ICOSAEDRO	a = arista	$A = 8.6605\ a^2$	$V = 2.1817\ a^3$
	PRISMA CUALQUIERA	a = arista lateral. P = perímetro de la sección recta A_b = área de la base h = altura	$A_l = Pa$ $A_t = Pa + 2A_b$	$V = A_b h$
	PRISMA RECTO	h = altura P = perímetro de la base A_b = área de la base	$A_l = Ph$ $A_t = Ph + 2A_b$	$V = A_b h$
	PARALEPIPEDO RECTANGULO	a = largo b = ancho c = altura	$A_l = 2(a + b)c$ $A_t = 2(a + b)c + 2ab$	$V = abc$

Figura	Nombre	Claves	Area	Volumen
h	PIRAMIDE CUALQUIERA	A_l = Suma de las caras laterales A_b = área de la base A_t = área total. h = altura	$A_t = A_l + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b h$
h, a	PIRAMIDE REGULAR	P = perímetro de la base a = apotema A_b = área de la base h = altura	$A_l = \frac{1}{2} Pa$ $A_t = \frac{1}{2} Pa + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b h$
h, a	TRONCO DE PIRAMIDE REGULAR	a = apotema h = altura P = perímetro de la base superior P' = perímetro de la base inferior A_b = área de la base superior A'_b = área de la base inferior	$A_l = \left(\frac{P + P'}{2}\right) g$ $A_t = \left(\frac{P + P'}{2}\right) a + A_b + A'_b$	$V = \frac{1}{3} h(A_b + A'_b + \sqrt{A_b A'_b})$
g, h	CILINDRO CUALQUIERA	g = generatriz C = perímetro de la sección recta A_b = área de la base h = altura	$A_l = Cg$ $A_t = Cg + 2A_b$	$V = A_b h$

Figura	Nombre	Claves	Perímetro	Area
	PENTAGONO	l = lado a = apotema	$P = nl$	$A = \frac{Pa}{2}$, $A = 1.721\ l^2$
	EXAGONO	l = lado a = apotema	$P = nl$	$A = \frac{Pa}{2}$, $A = 2.598\ l^2$
	EPTAGONO	l = lado a = apotema	$P = nl$	$A = \frac{Pa}{2}$, $A = 3.634\ l^2$
	OCTAGONO	l = lado a = apotema	$P = nl$	$A = \frac{Pa}{2}$, $A = 4.828\ l^2$

Figura	Nombre	Claves	Perímetro	Area
	ENEAGONO	l = lado a = apotema	$P = nl$	$A = \frac{Pa}{2}$, $A = 6.182\ l^2$
	DECAGONO	l = lado a = apotema	$P = nl$	$A = \frac{Pa}{2}$, $A = 7.694\ l^2$
	CIRCULO	D = diámetro r = radio π = 3.1416	$P = \pi D$ $P = 2\pi r$	$A = \frac{\pi D^2}{4}$ $A = \pi r^2$
	CORONA CIRCULAR	d_1 = diámetro mayor d_2 = diámetro menor r_1 = radio mayor r_2 = radio menor	P. ext. = πd_1 P. int. = πd_2 P. total: $\pi(d_1 + d_2)$	$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$ $A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$

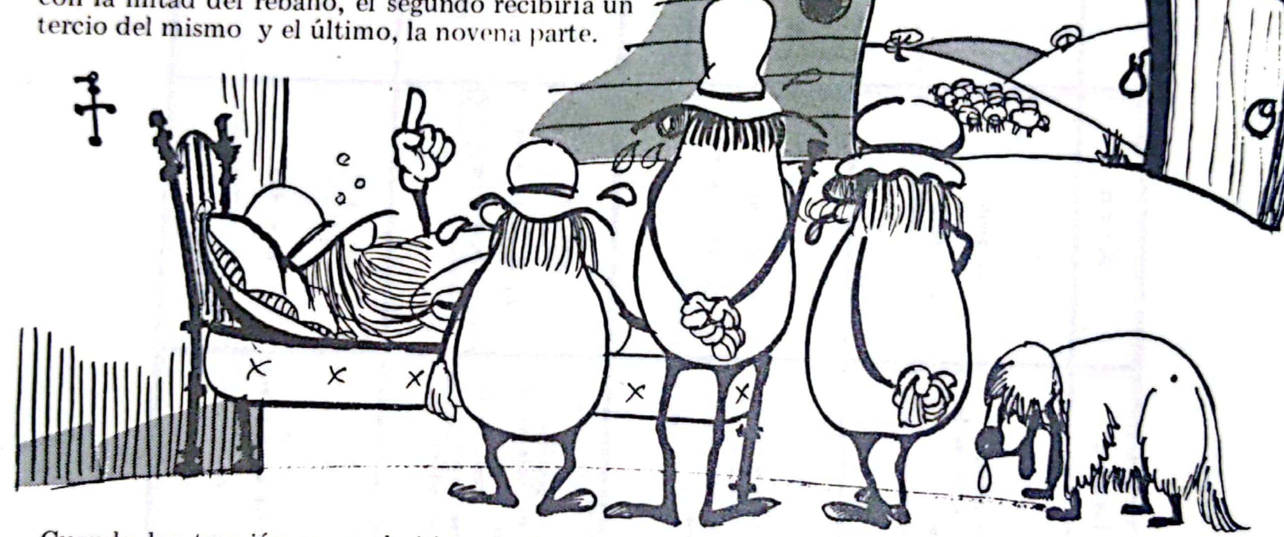
Figura	Nombre	Claves	Perímetro	Area
	SECTOR CIRCULAR	l = longitud del arco r = radio n = número de grados	$l = 0.01745\ rn$ $P = l + 2r$	$A = \frac{\pi r^2 n}{360}$ $A = \frac{lr}{2}$
	SEGMENTO CIRCULAR	c = cuerda r = radio h = altura n = número de grados	$P = 0.01745\ m + c$	$A = \frac{\pi r^2 n}{360} - \frac{c(r - h)}{2}$
	CUADRANTE	r = radio c = cuerda	$P = \frac{1}{2} r \pi + 2r$	$A = \frac{\pi r^2}{4} = 0.3927\ c^2$
	EMBECADURA	r = radio c = cuerda	$P = \frac{1}{2} r \pi + 2r$	$A = r^2 - \frac{\pi r^2}{4}$

Figura	Nombre	Claves	Area	Volumen
	CILINDRO CIRCULAR RECTO	h = altura r = radio de la base	$A_l = 2\pi rh$ $A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = \pi r^2 h$
	CONO CIRCULAR RECTO	g = generatriz h = altura r = radio de la base	$A_l = \pi rg$ $A_t = \pi rg + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
	TRONCO DE CONO CIRCULAR RECTO	g = generatriz r_1 = radio de la base mayor r_2 = radio de la base menor h = altura	$A_l = \pi g\,(r_1 + r_2)$ $A_t = \pi g\,(r_1 + r_2) + \pi (r_1^2 + r_2^2)$	$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$
	ESFERA	r = radio de la esfera	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

LAS 17 OVEJAS

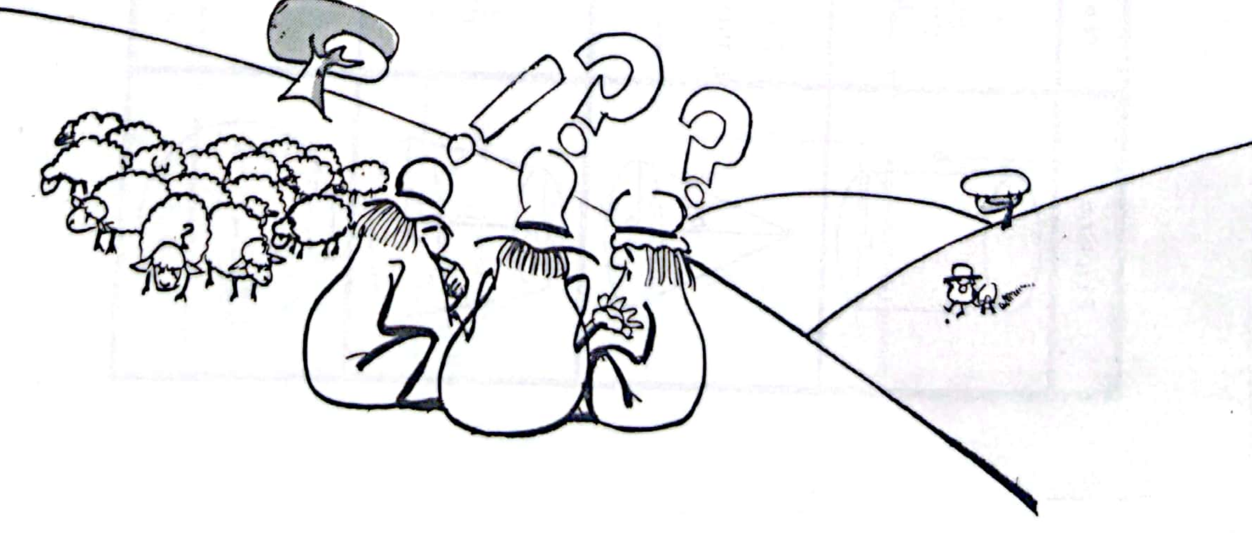
Cuando murió un viejo pastor que había dedicado toda su vida a la crianza de ovejas, dejó en herencia a sus tres hijos un rebaño de 17 cabezas.

El reparto que había ordenado en su testamento era el siguiente: el hijo mayor se quedaría con la mitad del rebaño, el segundo recibiría un tercio del mismo y el último, la novena parte.



Cuando los tres jóvenes se hubieron enterado de la decisión de su padre, se enfrascaron en una acalorada discusión, pues no podían ponerse de acuerdo en la parte del rebaño que debía recibir cada uno. Esto era de explicar, ya que 17 es un número que no puede dividirse exactamene por 2, 3 y 9.

Quiso la casualidad que pasara por allí un humilde agricultor trayendo una oveja que había comprado para su pequeño hijo, a quien pensaba iniciar en el arte del pastoreo. Al ver a los tres hermanos que proferían gritos e insultos desaforados, acercóse cautamente para tratar de averiguar el motivo de tan vergonzosa escena.





— Si me perdonáis — dijo tras un respetuoso saludo — ¿Podríais decirme cuál es la causa de vuestra discordia?.

En un comienzo, los tres hermanos miráronse entre sí desconcertados, y luego al intruso que había interrumpido su discusión, tras un silencio prolongado, el mayor de ellos explicó el problema que aparentemente no tenía solución.

El agricultor, que era aficionado a las matemáticas, meditó un momento y luego, dirigiéndose al mayor de ellos, replicó:

—He pensado en vuestro problema y tengo la certeza de que no es insoluble. Para ello he de poner la oveja que traigo junto a las de vuestro rebaño. Ahora, como véis, forman 18. A tí te corresponde la mitad de la herencia, que equivale a 9 ovejas. Estás ganando media oveja, con lo que puedes darte por contento.

Efectivamente, el primogénito vio que esta operación le beneficiaba, por lo que se retiró satisfecho con sus 9 ovejas.

Luego, se acercó al segundo de los hermanos y continuó:

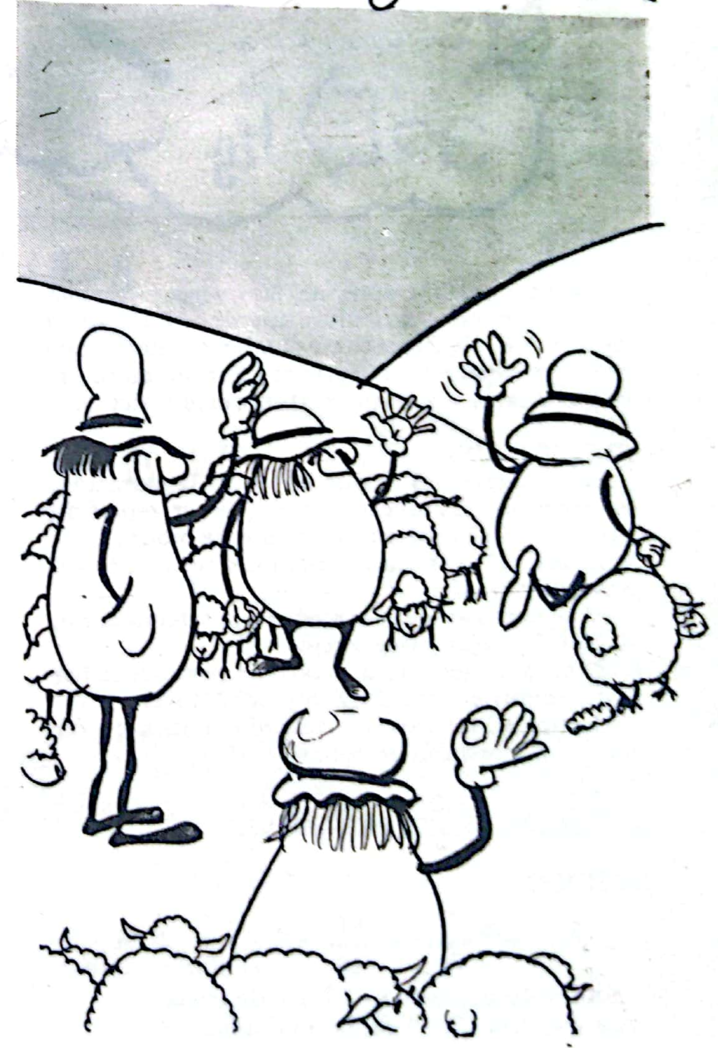
— A tí te tocaba recibir la tercera parte de 17 ovejas, es decir 5 y algo más. Este nuevo reparto te adjudica 6, lo cual te beneficia.

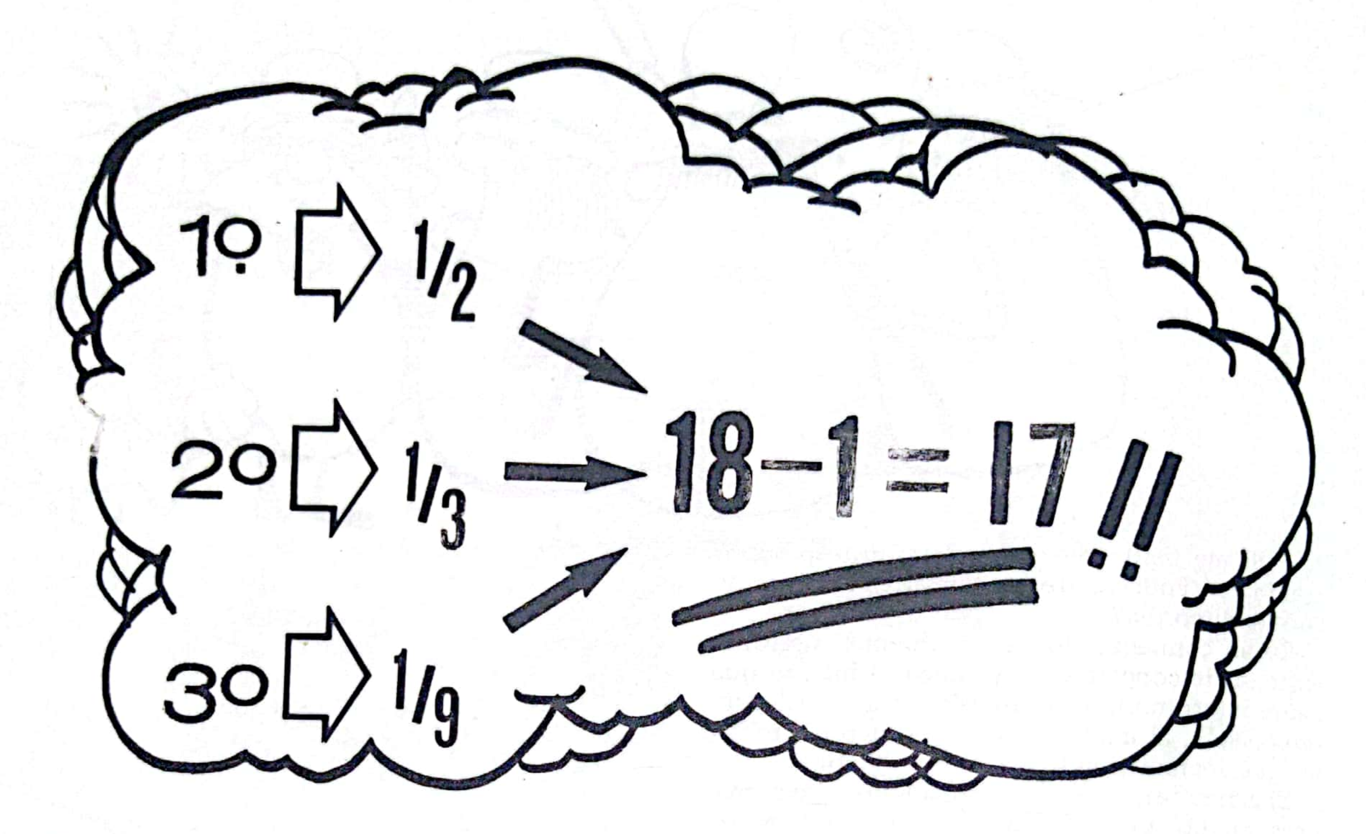
Al igual que su hermano mayor, el interpelado estuvo de acuerdo con su parte, y se marchó.

Finalmente, díjole al más joven:

— Tú debías haber recibido la novena parte del rebaño, o sea, un poco más de una oveja. En cambio ahora, recibirás 2, que es la novena parte de 18.

Viendo que esto le convenía, el último heredero se despidió para seguir el camino de sus hermanos mayores.





Como podemos apreciar, las ovejas repartidas por el modesto agricultor fueron 17 (la suma de 9 + 6 + 2), es decir el mismo número que dejó en herencia el testador. Por lo tanto, la oveja restante era la que pertenecía al agricultor.

EXPLICACION

De acuerdo con lo que se lee en la narración, el rebaño de 17 ovejas tenía que ser repartido entre los tres herederos del siguiente modo:

El mayor recibiría la mitad del rebaño, o sea, 8 ovejas y media.

El segundo se hacía acreedor a la tercera parte, es decir 5 ovejas y dos tercios.

El menor recibiría una novena parte de la herencia, equivalente a 1 oveja y ocho novenos.

Hecho el reparto de acuerdo a la decisión del padre, quedaría un residuo:

$$8\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3} + 1\frac{8}{9} = 16\frac{1}{18}$$

RESIDUO:

$$17 - 16\frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

Este resto equivale a 17/18 de oveja.

La fracción 17/18 expresa la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

Fracciones que representan los restos parciales.

En realidad, lo que hizo el agricultor al agregar su oveja al rebaño de 17 fue aumentar en 1/2 oveja la parte del primer heredero, en 1/3 de oveja la del mediano y en 1/9 de ovejas la del último.

Quiere decir que hubo un error por parte del testador, pues la mitad de un todo, más su tercera parte, más su novena parte, no es igual al todo.

Veamos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{17}{18}$$

El todo en este caso es la totalidad de las 17 ovejas, y como

$\frac{1}{18}$ de 17 es igual a $\frac{17}{18}$

El agricultor distribuyó los 17/18 entre los tres hermanos, tal como se observa líneas arriba.

LOS CUATRO CUATROS

Este famoso problema matemático consiste en escribir con cuatro cuatros y signos matemáticos una expresión que sea igual a un número entero dado. En la expresión no puede figurar ninguna cifra o símbolo algebraico que suponga letras, tal como Log., Lim., e, etc.

Veamos:

El cero puede formarse de la siguiente manera:

$$44 - 44 = 0$$

Los siguientes son algunos ejemplos que expresan los números del 1 al 10. Debe observarse que un mismo número puede ser representado con dos o más expresiones diferentes:

$$1 = \frac{44}{44}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4 + 4 + 4}{4}$$

$$4 = 4 + \frac{4 - 4}{4}$$

$$5 = \frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

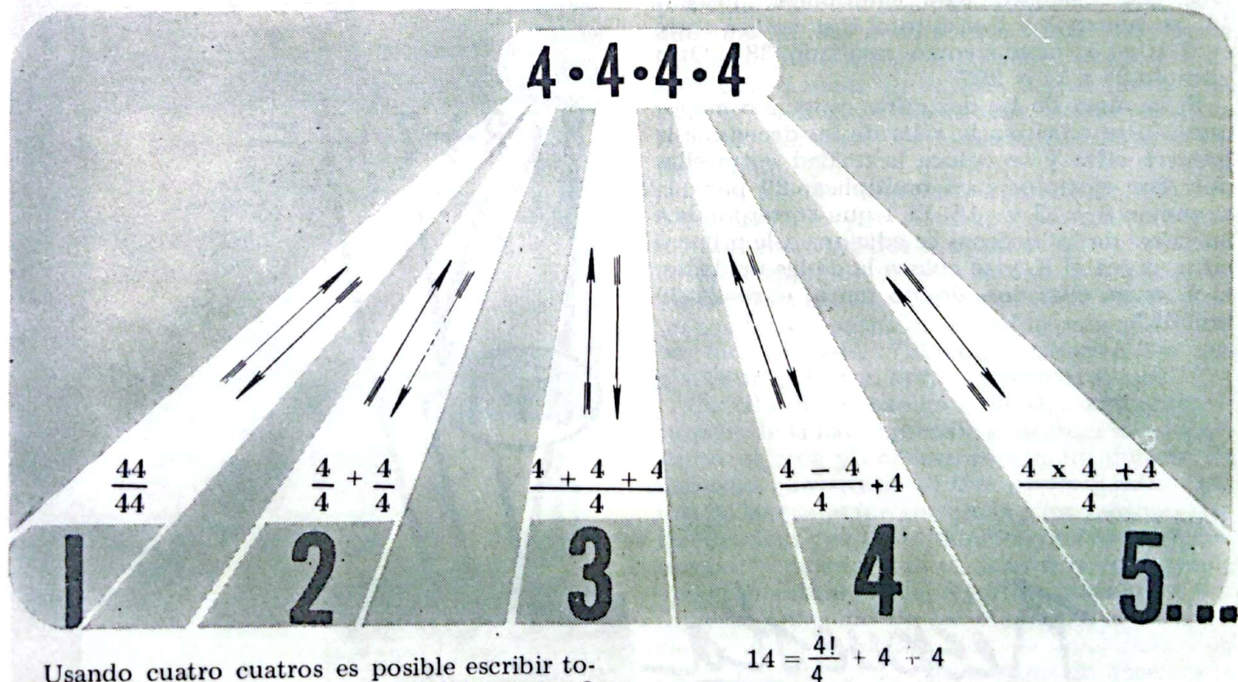
$$6 = \frac{4 + 4}{4} + 4$$

$$7 = \frac{44}{4} - 4$$

$$8 = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$$

$$10 = \frac{44 - 4}{4}$$



Usando cuatro cuatros es posible escribir todos los números enteros comprendidos entre 0 y 100, pero para ello debemos valernos de otro signo matemático que es el factorial (!). Por ejemplo; el número 14 puede expresarse así:

$$14 = \frac{4!}{4} + 4 + 4$$

ya que $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. O sea, la expresión planteada es:

$$\frac{24}{4} + 4 + 4 = 6 + 4 + 4 = 14.$$

LA MULTIPLICACION POR 11

1er. caso:

$$27 \times 11 = 2(2+7)7 = 297$$

Se trata de un artificio matemático cuya utilidad es permitir efectuar mentalmente multiplicaciones en las que uno de los productos es el número 11.

La operación se hace con extraordinaria rapidez: se suman las dos cifras que forman el número y el total se coloca entre ellas dos. Así, por ejemplo, para multiplicar 35 por 11, se suman 3 y 5 y el total 8 se coloca entre el 3 y el 5, dando como resultado 385. Otro ejemplo 27 x 11 = 297.

Si la suma de las dos cifras es igual o mayor que 10, se adiciona la cifra de las decenas a la primera cifra y se coloca la unidad entre ellas dos. Por ejemplo: para multiplicar 87 por 11, se suman 8 + 7 = 15. El 1 que corresponde a las cifras de las decenas se adiciona a la primera cifra, o sea el 8, y se coloca la de las unidades, el 5, entre ellas dos. Por lo tanto, el resultado será 957.

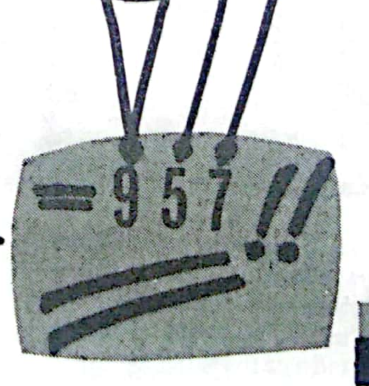
2do. caso:

$$87 \times 11 =$$

$$8(8+7)7 =$$

$$(8+1)5$$

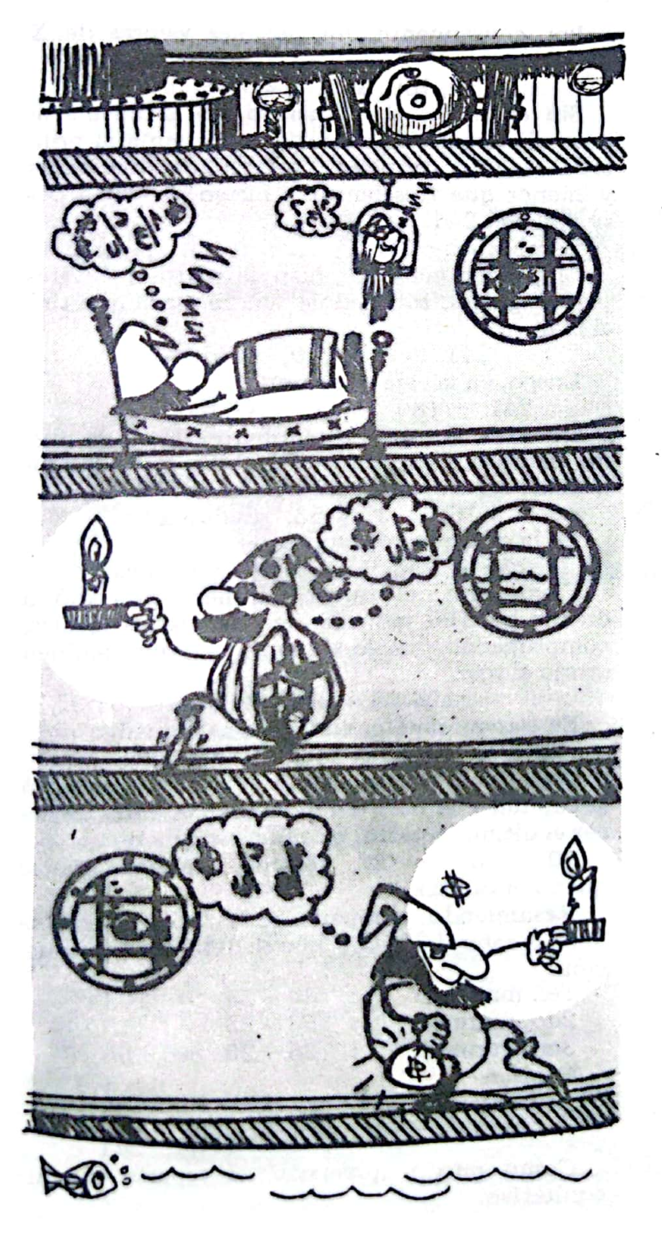
Respuesta



EL PROBLEMA DE LOS TRES MARINEROS

Hace mucho tiempo, un navío que llevaba un rico cargamento de oro y piedras preciosas, fue sorprendido por una violenta tempestad.

De no haber sido por la pericia y bravura de tres de sus marineros que, con suma habilidad manejaron las velas, el barco irremediablemente habría sido presa de la furia de las olas.



Una vez dominada la situación, el capitán les obsequió en recompensa a su valor, una caja que contenía cierto número de monedas de oro. Este número era superior a doscientos y menor que trescientos. Entre los tres acordaron que el reparto lo haría el capitán, al día siguiente, después del desembarco.

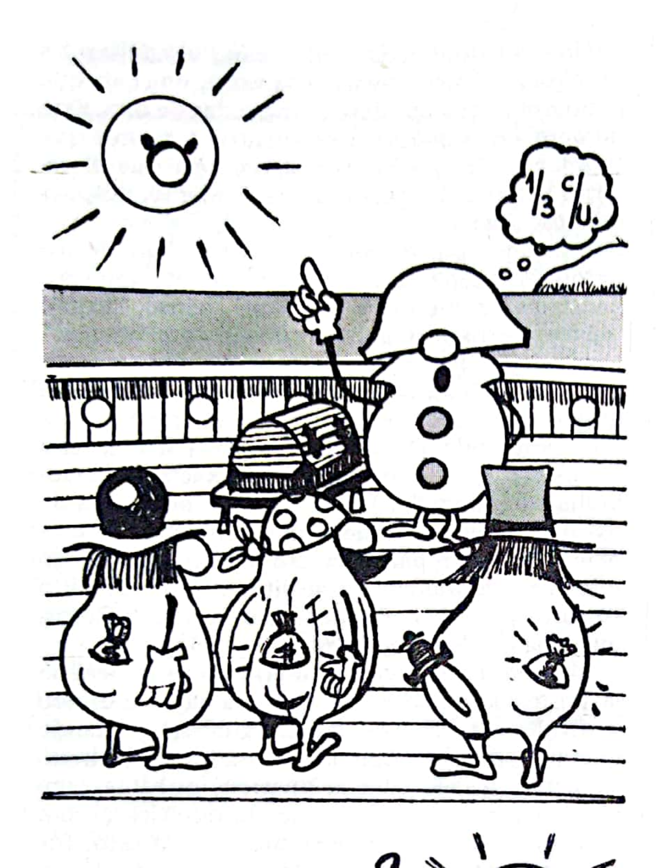
Sin embargo, durante la noche, uno de los marineros despertó y se acordó de las monedas. "Será mejor que tome mi parte", pensó, "así no tendré que discutir mañana con mis compañeros". Decidido, se levantó procurando no interrumpir el sueño de los otros marineros y dirigióse hacia donde se encontraba la caja que guardaba su valioso contenido. Dividió este en tres partes iguales y observó que la división era inexacta, pues sobraba una moneda. Pensando, que por culpa de esa insignificante moneda podrían surgir desavenencias en el reparto, la tiró al mar, para luego retornar sigilosamente a su litera. Había tomado su parte y la que correspondía a sus compañeros, quedaba en el mismo lugar.

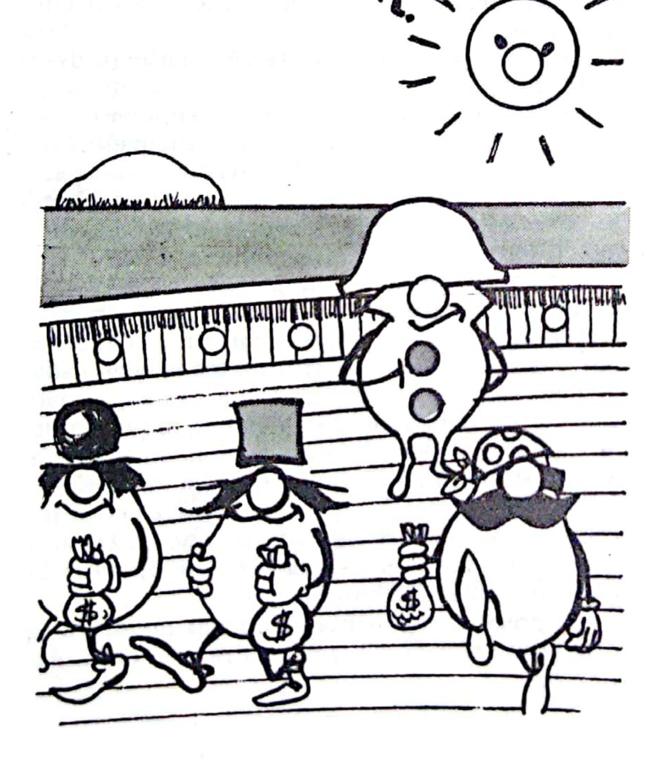
Más tarde, al segundo marinero se le ocurrió la misma idea. Dirigióse hacia la caja de dinero y dividió este en tres partes iguales, ignorando que uno de sus compañeros había ya retirado su parte. Al efectuar la división, quedóle también una moneda en exceso, la que tiró al mar para evitar futuras discusiones. Hecho esto, fue hacia su camarote con la parte que creyó le correspondía.

Poco tiempo después el tercer marinero despertó asaltado por el mismo pensamiento que habían tenido sus dos compañeros. Desconociendo por completo que se le habían anticipado, fue hacia la caja de monedas y las dividió en tres partes iguales, encontrándose también con que sobraba una moneda. Tal como hicieron los dos que le precedieron, optó por echarla al mar.

Cuando desembarcaron al día siguiente, el capitán de la nave procedió a efectuar el reparto. Abrió el arca y encontróse con un puñado de monedas que dividió en tres partes iguales, cada una de las cuales fue entregada a los valientes marineros. Esta vez sobró también una moneda que el capitán guardó para sí, pues si la entregaba a uno de sus marineros el reparto sería injusto. Por supuesto, ninguno de los marineros efectuó reclamo alguno, convencidos de que cada uno había retirado de la caja la parte de dinero a la que creía tener derecho.

Se pregunta: ¿Cuántas monedas guardaba la caja en un principio?, ¿cuánto recibió cada marinero?





EXPLICACION

Este problema se resuelve mediante un procedimiento algebraico cuyo resultado final es una fórmula general que permite calcular la incógnita:

$$X = 81K - 2$$

donde K es un número natural cualquiera (K = 1, 2, 3. . .)

Por consiguiente, los posibles valores de X son:

79, 160, 241, 322, 403. . .

Sin embargo, el enunciado del problema limita el número de monedas que había al principio a una cantidad "superior a doscientos y menor que trescientos". Luego, la única posibilidad es 241.

Comprobémoslo:

El primer marinero hizo la división en tres partes iguales, sobrándole una moneda que tiró al mar.

241 : 3 = 80, residuo 1

Luego, en la caja quedaron

241 − (80 + 1) = 160 monedas.

De estas, el segundo marinero efectuó la misma división y encontróse también con una moneda de exceso, que optó por echar al mar.

160 : 3 = 53, residuo 1

En la caja quedaron pues

160 − (53 + 1) = 106 monedas.

Finalmente, el tercer marinero procedió a dividir las 106 monedas en tres partes iguales, comprobando que le sobraba una, que también arrojó al mar.

106 : 3 = 35, residuo 1

En este momento, en la caja sólo quedaron

106 − (35 + 1) = 70 monedas.

Este fue el número de monedas que encontró el capitán a la hora del desembarco, antes de hacer el último reparto, que fue el siguiente:

70 : 3 = 23, residuo 1 moneda que se quedó el capitán.

Resumiendo, el reparto de las 241 monedas se llevó a cabo del modo que se detalla a continuación:

1er. marinero	:	80 + 23	=	103
2do. marinero	:	53 + 23	=	76
3er. marinero	:	35 + 23	=	58
Capitán				1
Arrojados al mar				3
			Total	241

Como puede apreciarse, el reparto no fue equitativo.

LOS NUMEROS AMIGOS

La "amistad numérica" es una propiedad particular que poseen ciertos pares de números cuyo significado explicaremos con unos ejemplos:

Consideremos los números 220 y 284.

El número 220 es divisible exactamente por los siguientes números:

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110.

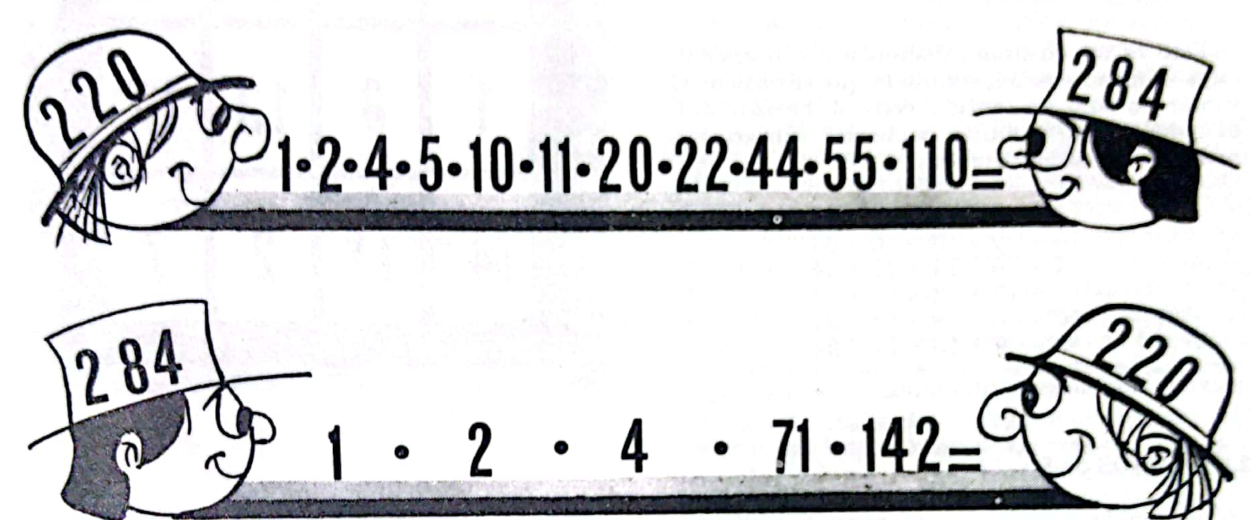
A su vez el número 284 puede ser dividido exactamente por estas cifras:

1, 2, 4, 71 y 142.

Estos son todos los divisores de 220 y 284 exceptuando los mismos números.

Ahora bien, la relación que existe entre estos dos números es realmente sorprendente. Si sumamos los divisores de 220 obtendremos un resultado igual a 284; y, si hacemos lo mismo con los divisores de 284, la suma será 220.

Esta notable coincidencia permite afirmar que estos dos números están unidos por una verdadera "amistad".



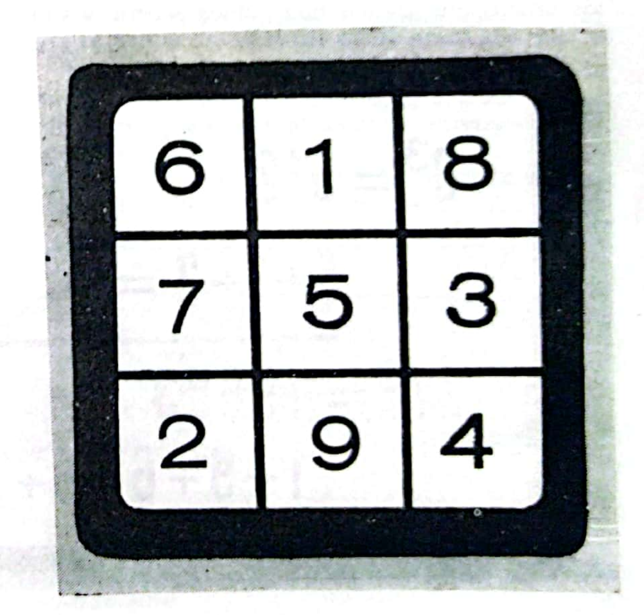
LOS CUADRADOS MAGICOS

El cuadrado mágico es un antiguo entretenimiento matemático que, como su nombre indica, consiste en un cuadrado dividido en cierto número de casillas, en cada una de las cuales debe colocarse un número entero de tal manera que se cumplan ciertos requisitos. Por ejemplo:

"En un cuadrado de 9 casillas colocar los números del 1 al 9, de modo tal que sumándolos en sentido horizontal, vertical o diagonal, se obtenga como resultado 15.

La solución es la que aparece en el lado derecho.

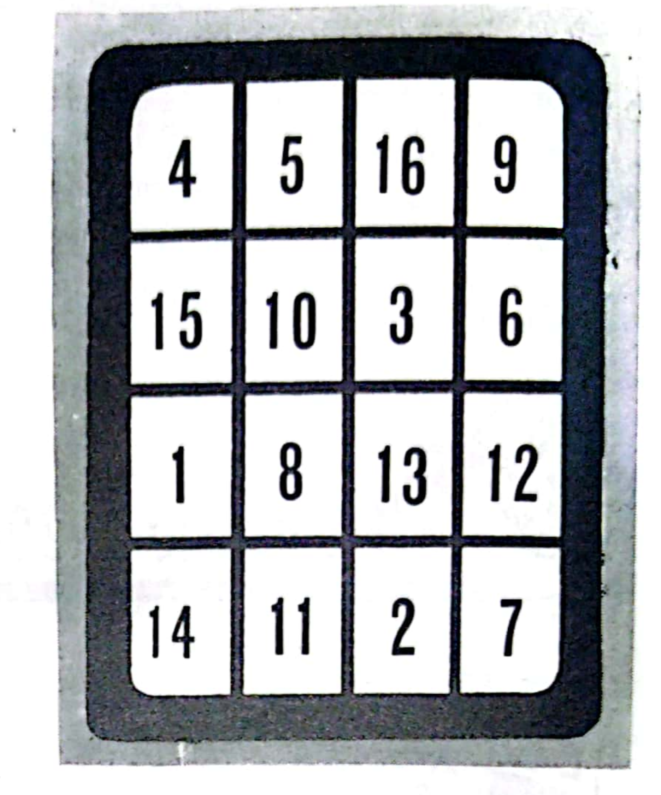
El origen de los cuadrados mágicos es oscuro, pero se sabe que en épocas remotas, constituía un entrentenimiento que atraía el interés de muchas personas. Las creencias de la época atribuyeron propiedades cabalísticas a este



juego de números, de lo que derivó el nombre de cuadrado mágico.

Cuando un cuadrado mágico posee alguna característica especial, como por ejemplo, ser suceptible de descomponerse en varios cuadrados mágicos, recibe el nombre de cuadrado hiper-mágico.

Existe un tipo de cuadrado hipermágico notable, llamado "cuadrado diabólico" por su capacidad de continuar siendo mágico cuando trasladamos hacia la derecha una columna que se halla a la izquierda o hacia arriba una hilera de abajo. Veamos un ejemplo:



Este es un cuadrado diabólico de 16 casillas, cuya constante es 34, resultado que se obtiene al sumar no sólo en sentido vertical, horizontal o diagonal, sino también sumando cuatro números de un mismo cuadro:

$$4 + 5 + 15 + 10 = 34$$
$$16 + 9 + 3 + 6 = 34$$
$$1 + 8 + 14 + 11 = 34$$
$$13 + 12 + 2 + 7 = 34$$
$$10 + 3 + 8 + 13 = 34$$
$$3 + 6 + 13 + 12 = 34$$

y así de 86 maneras diferentes.

LOS CUBOS de 8 y 27

Excluída la unidad, los números 8 y 27 son los únicos que tienen raíz cúbica exacta y son iguales a la suma de las cifras de sus cubos.

Sabemos que la raíz cúbica de 8 es 2 y la de 27 es 3.

Ahora veamos:

$$8^3 = 512$$
$$5 + 1 + 2 = 8$$

$$27^3 = 19683$$
$$1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$$

LA LEYENDA DEL AJEDREZ



En tiempos tan antiguos, que los historiadores no han podido precisar con exactitud, vivió en la India un rico y generoso rey muy querido por sus súbditos.

En su reino, que abarcaba inmensas tierras, fértiles valles y bosques innumerables, vivían hombres pacíficos y nobles que se dedicaban por entero a su trabajo.

Sin embargo, la paz no fue muy duradera, pues pronto el rico país fue azotado por una guerra. Las tropas enemigas habían atravesado las fronteras y en ese momento dirigíanse a tomar la capital donde moraba el soberano. El y su hijo, obligados por esta circunstancia, tuvieron que empuñar las armas para defender la soberanía de su patria.

Según cuenta la leyenda, el valeroso rey estaba dotado de un notable talento militar. Como gran estratega elaboró un ingenioso plan de batalla que le permitió alcanzar la victoria.

No obstante, el triunfo resultó muy caro. Se habían perdido muchas vidas, y entre ellas, la del joven príncipe, quien había resistido fieramente en la posición que se le había encomendado. A pesar de todo, su heroico acto no fue vano, pues permitió que las huestes de su padre derrotaran al enemigo.

Una vez finalizado el sangriento episodio el rey con sus tropas vencedoras retornó a la ciudad. Profundamente consternado por la pérdida de su primogénito, decretó la prohibición de manifestaciones ruidosas celebrando la victoria, y se encerró en sus aposentos sumido en una gran tristeza.

El tiempo, en vez de apaciguar el recuerdo de su hijo, lo intensificó aún más, a pesar de los consuelos que le hacían llegar numerosas personas y amigos.

El monarca pasaba horas y horas sentado ante una gran caja de arena en la que trazaba las acciones que se habían realizado durante la batalla. Una vez completadas todas las maniobras borraba las líneas que había marcado, para comenzar nuevamente.



Un día, estando el rey acompañado de sus penosos recuerdos anunciáronle la presencia de un joven y modesto brahmán. Otras veces ya había intentado solicitar una audiencia, pero el rey sin ánimo de recibir a nadie, se la había negado.

Sin embargo, esta vez, el rey accedió a que el joven brahmán fuera llevado a su presencia.

Tras una respetuosa venia, el recién llegado presentóse ante el soberano diciendo:

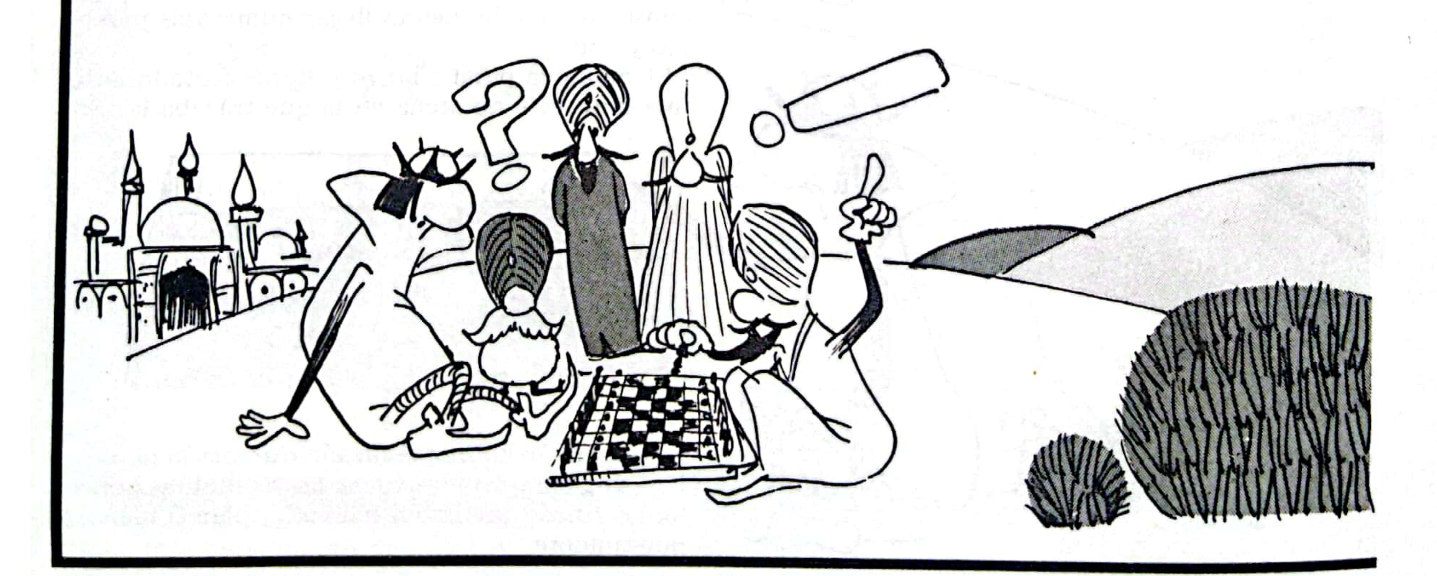
—Mi nombre es Lahur Sessa y procedo de una lejana aldea hasta donde llegó la noticia de que nuestro valeroso y noble rey está profundamente amargado por la pérdida de su primogénito en la guerra. Pensé que esta contrariedad no traería nada bueno para nuestro país, pues, ¿de qué vale que un gobernante se encierre en sí mismo torturado por sus penas? Así que me propuse inventar un juego que pudiera distraerlo y a la vez ayudarlo a mitigar el profundo dolor que encierra su corazón. Este es pues, oh ilustrísimo señor, el humilde presente que pongo en vuestras manos.

Sin haber terminado de pronunciar estas últimas palabras, el joven brahmán entregó al soberano un gran tablero cuadrado dividido en 64 casilleros blancos y negros.

El Rey, sin poder contener su curiosidad, aceptó el ofrecimiento de buena gana.

—Sobre el tablero se colocan estas 32 piezas— continuó explicando el brahmán —que, como véis, la mitad de ellas son blancas y el resto negras.

Y así, el monarca y su súbdito, concentrados por completo en el novedoso juego, continuaron conversando animadamente.





El rey rápidamente aprendió las reglas del juego y lograba ya derrotar a sus visires en emocionante partidos.

De cuando en cuando, el joven brahmán que miraba silencioso el desarrollo de los encuentros, intervenía para aclarar cualquier duda o error que pudiera presentarse.

En un momento determinado el rey observó sorprendido, que la posición de las piezas parecía reproducir exactamente la batalla en la que había perdido a su joven hijo.

—Mirad.— Dijo el inteligente brahmán— para poder ganar la partida es necesario sacrificar este alfil, el cual tiene exactamente la misma posición que la que tenía nuestro joven príncipe en la batalla donde encontró la muerte.

Este alfil era, precisamente, la pieza que el rey había defendido durante toda la partida con gran empeño.

A partir de este momento, el guerrero monarca dióse cuenta de que muchas veces es necesario el sacrificio de un solo hombre para lograr la paz y el bienestar de todo un pueblo.

El rey había quedado más que satisfecho con el maravilloso juego, al que calificó de sumamente instructivo, ingenioso e interesante.



Y dirigiéndose al humilde brahmán le dijo:

—Quiero recompensarte, inteligente amigo, por el maravilloso presente que me ha servido para olvidar mis viejas penas y hacerme comprender ciertas cosas que antes me resultaban inexplicables.

Estas generosas palabras no perturbaron al joven brahmán, quien sin hacer ningún gesto que denotara sorpresa, replicó:

—La única recompensa a la que creía tener derecho, oh noble señor— me la acabáis de dar en este momento. Nada hay más valioso para mí, que ver a nuestro rey contento y aliviado de las prolongadas horas de sufrimiento. Cualquier otro premio sería excesivo.

—Me sorprende tanta serenidad y tanto desamor por las cosas materiales, oh joven brahmán. Sin embargo quiero insistir en mi ofrecimiento. Te daré en recompena a tu inteligencia e ingenio cualquier cosas que me pidáis. ¿Que queréis? ¿La administración de una provincia?, ¿un palacio? ¿ un arca repleta de oro y joyas? Escoged.

Demostrando la misma serenidad de siempre, respondióle el brahmán:

—No voy a rechazar vuestro generoso ofrecimiento porque pecaría de desobediente y descortés.

Sin embargo, no deseo ni tierras, ni palacios, ni oro. Deseo que me recompenséis con granos de trigo.

—¿Granos de trigo?— exclamó sorprendido el rey ante la insólita petición. —¿Cómo te pagaré con tan insignificante moneda?

—Muy sencillo— continuó el brahmán. Me daréis un grano de trigo por el primer casillero del tablero; dos por el segundo; cuatro por el tercero; ocho por el cuarto; y así, duplicando sucesivamente hasta completar la última casilla del tablero.

Cuando terminó de hablar el joven brahmán, escuchóse en todo el recinto una sonora carcajada que lanzaron no sólo el rey, sino también todos los que se hallaban presentes.

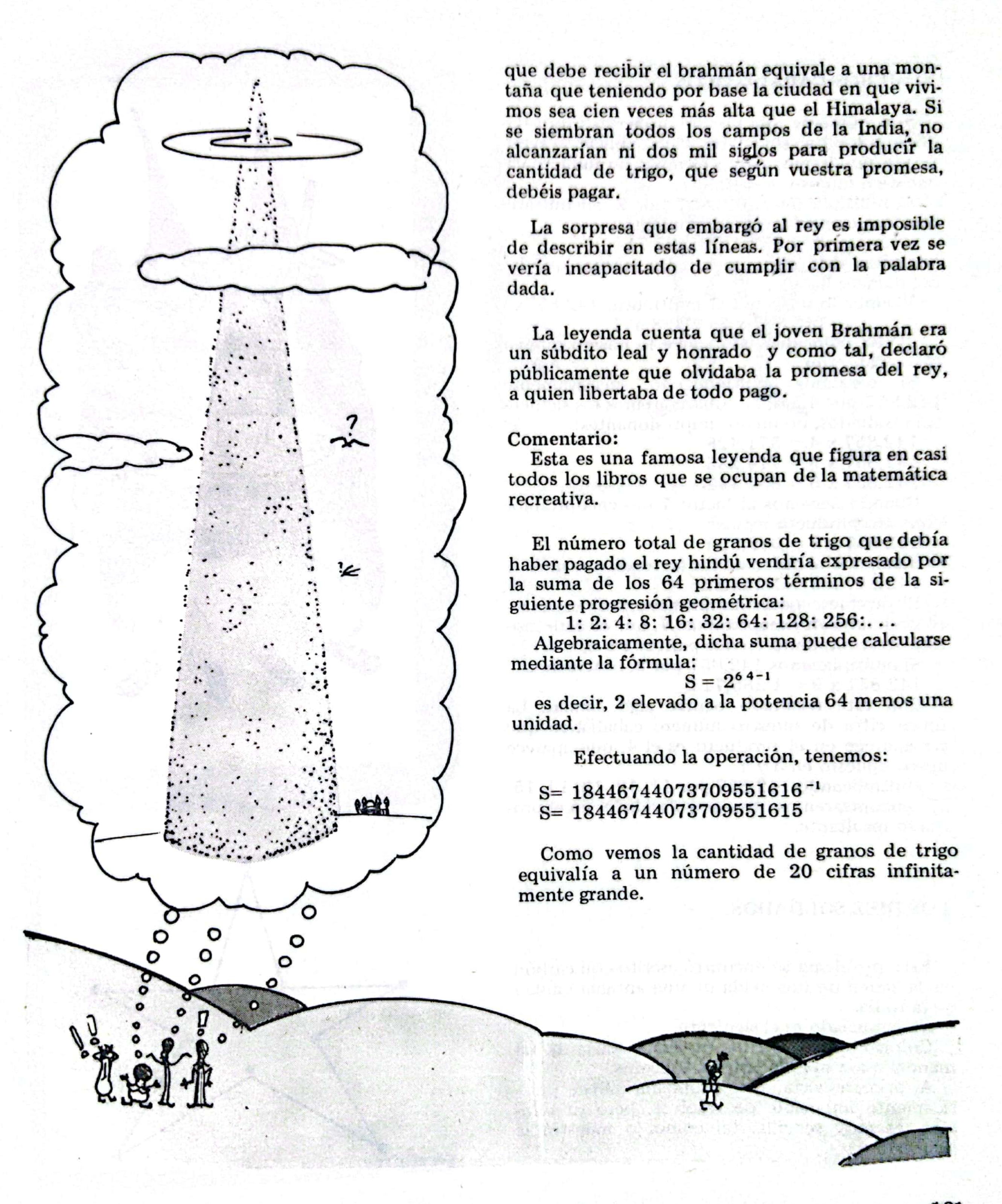
—Nunca he visto tanto desdén ni desinterés por la fortuna; sin embargo, si así lo queréis, ordenaré a mis matemáticos que calculen la porción de trigo que os corresponde. Estoy seguro que tal cantidad no alcanzará ni para saciar el hambre del hombre más pobre de mi reino.

Una vez dicho esto, el rey mandó llamar a sus algebristas para que calcularan el valor exacto de la recompensa.

Tras largas horas de estudio, los sabios matemáticos se presentaron ante el rey para informar el resultado de la misión que se les había encomendado.

—¡Poderoso señor!— exclamó el más viejo de los calculadores— hemos encontrado el número de granos de trigo y obtuvimos como resultado una cantidad tan infinitamente grande que la mente humana no es capaz de imaginar. La conclusión a la que llegamos es la siguiente: el trigo





que debe recibir el brahmán equivale a una montaña que teniendo por base la ciudad en que vivimos sea cien veces más alta que el Himalaya. Si se siembran todos los campos de la India, no alcanzarían ni dos mil siglos para producir la cantidad de trigo, que según vuestra promesa, debéis pagar.

La sorpresa que embargó al rey es imposible de describir en estas líneas. Por primera vez se vería incapacitado de cumplir con la palabra dada.

La leyenda cuenta que el joven Brahmán era un súbdito leal y honrado y como tal, declaró públicamente que olvidaba la promesa del rey, a quien libertaba de todo pago.

Comentario:

Esta es una famosa leyenda que figura en casi todos los libros que se ocupan de la matemática recreativa.

El número total de granos de trigo que debía haber pagado el rey hindú vendría expresado por la suma de los 64 primeros términos de la siguiente progresión geométrica:

1: 2: 4: 8: 16: 32: 64: 128: 256:. . .

Algebraicamente, dicha suma puede calcularse mediante la fórmula:

$$S = 2^{64-1}$$

es decir, 2 elevado a la potencia 64 menos una unidad.

Efectuando la operación, tenemos:

$S = 18446744073709551616^{-1}$
$S = 18446744073709551615$

Como vemos la cantidad de granos de trigo equivalía a un número de 20 cifras infinitamente grande.

NUMEROS CABALISTICOS

Son números que presentan ciertas propiedades que resultan singulares. Para explicar su significado pondremos como ejemplo un número cabalístico famoso: el 142,857.

Si multiplicamos 142,857 por 2, encontraremos una coincidencia sorprendente:

142,857 x 2 = 285,714

las cifras del producto son las mismas que las del número dado.

Veamos lo que pasa al multiplicar 142,857x3

142,857 x 3 = 428,571

¡Feliz coincidencia! Ocurre lo mismo que en el caso anterior.

Si seguimos multiplicando sucesivamente 142,857 por 4,5,6, . . . observaremos los siguientes resultados, no menos impresionantes:

142,857 x 4 = 571,428
142,857 x 5 = 714,285
142,857 x 6 = 857,142

Cuando llegamos al factor 7 nos encontramos con otro producto regular:

142,857 x 7 = 999,999

Siguiendo el orden de los factores, tenemos:

142,847 x 8 = 1'142,856

El producto posee las mismas cifras del número original, con excepción del 7, que en este caso está descompuesto en dos partes: 1 y 6.

Si multiplicamos 142,857 por 9, obtenemos:

142,857 x 9 = 1'285,713

Con este resultado ocurre algo similar. La única cifra de nuestro número cabalístico que no aparece en el producto es el 4, que aparece descompuesto en 3 y 1.

Multiplicando 142,857 por 11, 12, 13, 14, 15. . . . encontraremos otras singularidades en el producto resultante.



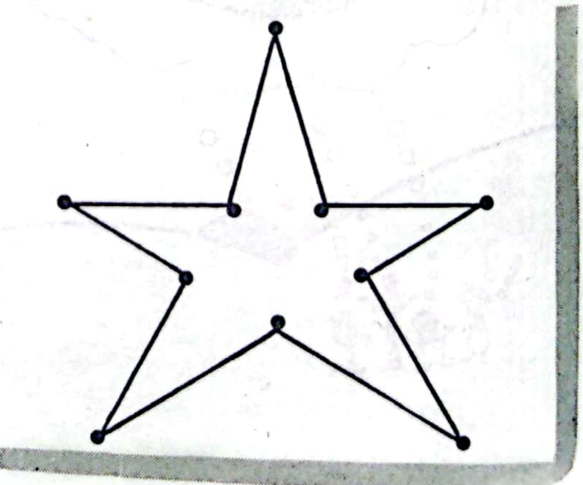
LOS DIEZ SOLDADOS

Este problema se encontró escrito con carbón en la pared de una celda de una antigua ciudad de la India.

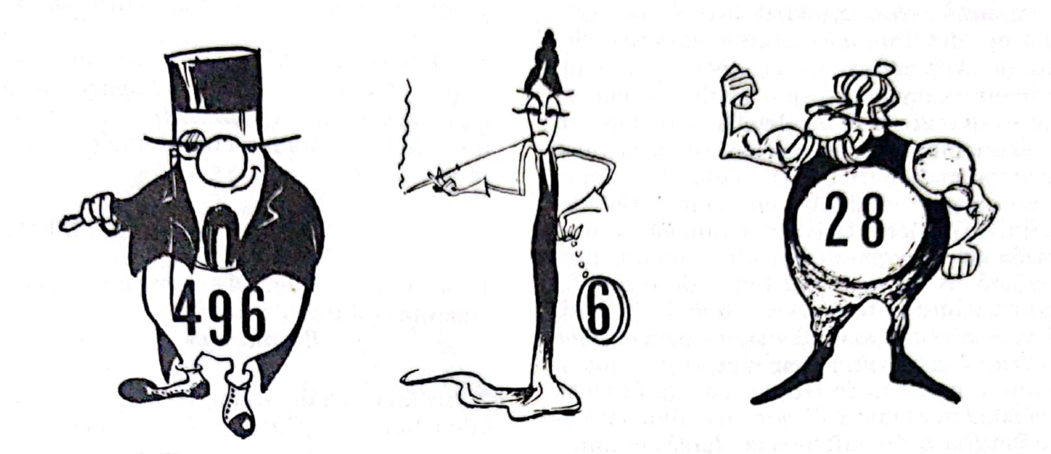
Su enunciado es el siguiente:

Colocar diez soldados en cinco filas, de tal manera que cada fila tenga 4 soldados.

A primera vista, este problema parece prácticamente imposible de resolver, pero su solución es muy sencilla, tal como lo muestra la figura:



LOS NUMEROS PERFECTOS



Un número perfecto tiene la propiedad de ser igual a la suma de sus divisores, exceptuando el propio número.

Veamos unos ejemplos:

El número 496 presenta 9 divisores menores que 496:

1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

La suma de esos divisores es:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 +31 + 62 +124 +248=496

El 28 es también un número perfecto cuyos 5 divisores: 1, 2, 4, 7 y 14 suman 28.

El número perfecto más pequeño es el 6. Sus divisores 1, 2 y 3, sumados, dan como resultado el mismo número 6.

10) TALENTO MATEMATICO

Aun cuando esta prueba presupone que usted posee determinados conocimientos elementales de Aritmética, no consiste de ningún modo en un examen. Lo que mediante ella se pretende es descubrir su tendencia o inclinación para el razonamiento matemático —para razonar con símbolos matemáticos tales como los números—, y no sus conocimientos en esa materia.

A tal fin, no encierra esta prueba ninguna cuestión basada en las reglas de cálculo. Ninguna pregunta hallará usted aquí del tenor de ésta, por ejemplo: "Cuánto son 8 x 5 — 6 + 7?". Ni siquiera largos problemas de división o para extraer un denominador común. Semejantes preguntas, con las que a menudo se tropieza en las pruebas de "capacidad matemática", son en realidad pruebas de memoria o de suficiencia. Jamás permitirán medir su aptitud para razonar mediante números. Lo más que puede demostrar es si recuerda usted la tabla de multiplicar, las reglas de substracción de quebrados o si se ha ejercitado usted bastante en realizarlas con cierta rapidez.

Tampoco hallará aquí preguntas similares de naturaleza geométrica, aunque las llamadas "pruebas matemáticas" las inserten con notable regularidad. Esto equivaldría a razonar con superficies y con espacios más bien que a razonar con números. Las investigaciones psicológicas han demostrado la absoluta falta de correlación entre ambas aptitudes, y, de hecho, todo parece indicar que existe entre ellas una mayor o menor independencia, y que quizá exigen unas distintas facultades.

Nivel arimético

Aquí le beneficia a usted la duda, puesto que se supone que tiene usted menos conocimientos ariméticos que un niño adelantado.

Esta prueba se limita a razonar a través de un alfabeto matemático elementalísimo.

Si en ella obtiene usted un resultado elevado, haría bien ejercitándose en las matemáticas aun cuando en la actualidad no tenga un gran conocimiento de ellas. Asimismo obtendrá probablemente un mayor éxito en los tipos de profesión en los que las matemáticas constituyen un factor importante. Si su resultado es sólo regular, posiblemente tendrá usted que hacer un esfuerzo mayor y un estudio más intensivo para descollar en dichas profesiones. Un resultado pobre indica, en general, que sería para usted difícil hacer progresos en cualquier cometido o profesión que exija un alto grado de razonamiento matemático.

INTRODUCCION.— Anote su respuesta a cada una de las cuestiones en el espacio señalado. La exactitud es más importante que la rapidez, pero no se detenga demasiado en una cualquiera de las preguntas o cuestiones.

TIEMPO MAXIMO: 50 MINUTOS.

1. Si de una docena de manzanas salen 4 malas, ¿cuántas saldrán buenas?

Respuesta (   )

2 En una caja de 48 manzanas, 8 de cada docena salen buenas. ¿Cuántas sadrán malas en toda la caja?

Respuesta (   )

3 ¿Qué número es menor que 60 en la misma medida que es mayor que 50?

Respuesta (   )

4 Una chiquilla gasta la mitad de su dinero en comer y la mitad de esta cantidad en el cine, que le cuesta 4 soles. ¿Cuánto ha gastado en comer?

Respuesta (   )

5 ¿Cuántas horas tardará un automóvil en recorrer 400 kilómetros yendo a una velocidad de 50 kilómetros por hora?

Respuesta (   )

6 36 es mayor que 29 en la misma medida que es menor que.... ¿cuál número?

Respuesta (   )

7 Su reloj adelanta 4 minutos cada 24 horas. Si a las 7 y 30 de la mañana marca 7 y 30 1/2, ¿qué adelanto llevará a mediodía?

Respuesta (   )

8 La suma de A + B es igual a 116. A es 3 menos que C, pero 4 más que B. ¿Qué número es igual a C?

Respuesta (   )

9 Si de cada 100 hombres 7 son criminales, ¿cuántos hombres habrá, entre 500, que no sean criminales?

Respuesta (   )

10. Un agente de Bolsa compró 3 acciones a 10 y las vendió a 6 cada una de las que compró a 5. Si su beneficio total fue 8, ¿cuántas acciones compró a 5?

Respuesta (   )

11. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 400 kilómetros un avión cuya velocidad sea de 600 kilómetros por hora?

Respuesta (   )

12. Si 6 1/2 metros de tela adamascada cuestan 26 soles, ¿cuánto costarán 3 1/2 metros?

Respuesta (   )

13. Si un tendero dispone de suficiente cantidad de huevos para abastecer a 300 clientes durante dos semanas, ¿cuánto tiempo podría abastecer con igual cantidad a 400 clientes?

Respuesta (   )

14. Suponga que A, B y C son números. Suponga que D es la suma de A,B y C. En este caso, ¿sería D — A = B + C?

Indique: SI ☐ *NO* ☐ *QUIZA* ☐

15 Suponga que A y B sean números. Suponga que D es la diferencia entre A y B. En este caso, ¿sería D + A= B si B es mayor que A?

Indique: SI ☐ *NO* ☐ *QUIZA* ☐

16. 10 barcos necesitan 10 días para consumir 10 tanques de aceite. ¿Cuántos días necesita 1 barco para consumir 1 tanque de aceite?

Respuesta (   )

17 En una carrera de caballos, el vencedor llegó a la meta a las 3.01 de la tarde, con 4 cuerpos de ventaja sobre el que llegó en tercer lugar, el cual llevaba una desventaja de 2 cuerpos con respecto al que llegó en segundo lugar. Este llegó a la meta con 4 1/2 cuerpos de ventaja sobre el cuarto caballo, que hizo el recorrido en 61 $^{3}/_{10}$ segundos. En el último cuarto de carrera cada caballo recorría un cuerpo en 1/5 de segundo. ¿A qué hora había comenzado la carrera?

Respuesta (   )

18. ¿Qué número sigue en esta serie? 1, 1, 2, 6,

Respuesta (   )

19. Sustituya los números omitidos en este problema de multiplicación

		—	—	—	—
			x	6	—
	7	—	5	8	—
—	—	—	—	—	
—	—	—	—	2	6

20. Suponga que en este problema de multiplicación las letras representan números. ¿A qué número equivale cada una de las letras?

	F	1	F
	x	2	E
	6	3	C
D	2	D	
D	8	B	C

Respuesta: B = , C = , D = E = , F =

21 Suponga que en este problema de multiplicación las letras son números y que cada uno de los espacios en blanco representa una letra omitida. Sustituya las letras que faltan.

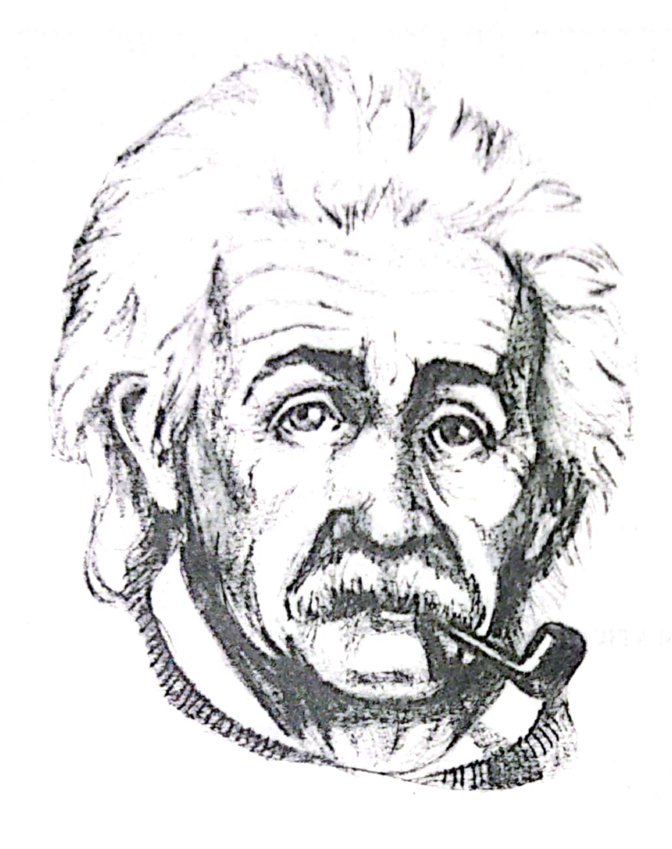
		5	—	4
		x	C	5
	2	—	A	Y
—	1	F	6	
—	—	4	8	—

22. En un lote de 154 vestidos hay 3 vestidos blancos menos que rojos, pero 5 blancos más que verdes. Si el lote se compone sólo de vestidos verdes, rojos y blancos, ¿cuántos hay rojos?

Respuesta (   )

SUPERIOR	(DIEZ POR CIENTO)	17-22	Su resultado . . . .
BUENO	(VEINTE POR CIENTO)	14-16	
REGULAR	(TREINTA POR CIENTO)	11-13	Promedio: 12
POBRE	(CUARENTA POR CIENTO)	0-10	

EL PERSONAJE DE LA CARATULA



ALBERT EINSTEIN

Nació el 14 de marzo de 1879, en Ulm, en Alemania bávara. La mayor parte de la juventud de Einstein transcurrió en Munich, donde recibió su instrucción elemental. A los quince años conocía perfectamente las obras de Euclides, Newton y Spinoza y se había ganado el apodo de "El viejo aburrido".

A los diecisiete años inició estudios en la Escuela Politécnica de Zurich, en Suiza, pues había decidido explorar el mundo de la ciencia.

Optó por especializarse en Matemáticas y Física. Asistió a la Universidad de Zurich, a la vez que enseñaba en el Instituto de Enseñanza Superior de esa ciudad y, un poco más tarde en la escuela de Schaffhausen.

A los veintidós años se hizo ciudadano suizo y se casó con una antigua compañera de estudios, Milera Marec.

En 1905, los Annalendez Physik publicaron un folleto de treinta páginas de Einstein, "sobre la electrodinámica de los cuerpos móviles", un documento de título modesto y de tipo académico aparentemente, que estaba destinado a cambiar radicalmente nuestra concepción de las propiedades de la materia y de la estructura del Universo. Su trascendencia enorme no fue advertida al principio, sino que sólo se hizo aparente en el año 1920, cuando una traducción de la obra **La Relatividad, su teoría general y especial,** de Einstein, constituyó un desafío hecho a todos los físicos y matemáticos del mundo entero.

Los seguidores de Newton estaban convencidos de que el movimiento y el reposo eran absolutos y mensurables; Einstein demostró que el movimiento y el reposo son relativos: son medidos en forma diferente por observadores diferentes. Desde este punto de partida, procedió a demoler el carácter absoluto de la extensión, la masa y el tiempo, las tres medidas fundamentales de las que dependen todas las demás cantidades.

Einstein demostró que nada podía exceder la velocidad de la luz y que las masas aumentaban con las altas velocidades. Esto significaba que, a velocidades próximas a la de la luz, un empuje

contribuye solo en parte a aumentar la velocidad, en tanto que lo restante va a aumentar la masa del objeto. El aumento de la masa puede ser relacionado directamente con la energía del empuje, para obtener la sencilla pero asombrosa ecuación $E=mc^2$.

Aquí demostró Einstein su genio, asegurando que no sólo el aumento relativo de la masa tenía su energía equivalente, sino que "toda la materia era energía concentrada".

Aunque no tenía ideas políticas, Einstein nunca vaciló en tomar una actitud definida siempre que confrontó la violencia. Amante de la paz y defensor de los pobres, dio el dinero de su premio Nóbel para fines caritativos.

Tras una repentina y breve enfermedad, Einstein falleció a la edad de setenta y seis años. Al parecer padecía de endurecimiento de las arterias, lo que causó una ruptura arterial que le produjo la muerte el 18 de abril de 1955.

RESPUESTAS AL TEST "TALENTO MATEMATICO"

Talento matemático

1) 8, 2) 16, 3) 55, 4) 8 soles 5) 8, 6) 43, 7) 1 minuto y 1/4' o un minuto y 15 segundos, o 75 segundos, 8) 63, 9) 465, 10) 20, 11) 2/3, 12) 14 soles, 13) 1 semana y 1/2, ó 10 días y 1/2, 14) SI, 15) SI, 16) 10, 17) 3 tarde, 18) 24, 19).

19)

		7	9	5	4
			x	6	9
	7	1	5	8	6
4	7	7	2	4	
5	4	8	8	2	6

20) B—7, C—6, D—4, E—3, F—2,

21)

		5	C	4
		x	C	5
	2	F	A	Y
A	1	F	6	
A	C	4	8	Y

22) 55.

Concédase 1 punto por cada respuesta correcta.

INDICE